1.1 Experimenteren

Inleiding

Als je vaak met een zuivere dobbelsteen gooit, komt elk vlakje gemiddeld genomen ongeveer even vaak boven te liggen. In de praktijk blijkt dat dit bij steeds meer herhalingen steeds beter gaat kloppen.
Omdat een dobbelsteen 6 vlakken kent, zeg je dat de kans dat één van die vlakken boven komt 1 op de 6 is. Het is gebruikelijk om dit als breuk te schrijven en te zeggen dat de kans op het gooien van bijvoorbeeld 4 ogen met een zuivere dobbelsteen $\frac{1}{6}$ is.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van experimenten;
- simulaties van kansexperimenten uitvoeren.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Of iets gaat gebeuren weet je meestal niet van tevoren. Kun je iets zeggen over de kansen bij de volgende situaties?

a Je gooit met twee dobbelstenen. Je telt het aantal ogen dat boven komt.

b Een voetbalwedstrijd kan beslist worden door het nemen van strafschoppen. Van tevoren weet je niet hoeveel ervan gemist zullen worden.

c Wanneer je iemand aardig vindt, dan kun je met deze persoon een afspraakje maken. Misschien heb je een leuke avond.

d Je doet mee aan de Lotto. Win je de hoofdprijs?

Uitleg

Een paar uitspraken over kansen:

- Als je met twee dobbelstenen gooit, is de kans dat je tien ogen gooit kleiner dan dat je zeven ogen gooit.
- De kans dat een kind van wie de vader en moeder bruine ogen hebben, ook bruine ogen heeft, is groot.

Kansen druk je uit in percentages (tussen 0% en 100%), breuken (tussen 0 en 1) of decimale getallen (tussen 0 en 1). Zo kun je zeggen:

- De kans dat je met een dobbelsteen een even aantal ogen gooit, is 0,5 of $\frac{1}{2}$.
- Op grond van eerdere resultaten schat ik dat Ajax 80% kans heeft om deze wedstrijd te winnen.

Kansen spelen een belangrijke rol. Je neemt vaak aan dat dobbelstenen geen afwijkingen hebben, dat geen van de mogelijke uitkomsten waarschijnlijker is dan een andere. Je zou dat kunnen testen door te proberen.

Als je bijvoorbeeld de kans wilt uitrekenen dat bij het werpen met een dobbelsteen het vlakje met vijf ogen bovenkomt, kun je enkele honderden of meer keren met een dobbelsteen gooien en proefondervindelijk vaststellen welk vlakje bovenkomt.

Je ziet hoe vaak een bepaald aantal ogen is geworpen bij 600 en 6000 keer met een dobbelsteen gooien. Daarbij noem je X het aantal geworpen ogen.

uitkomst X	1	2	3	4	5	6
na 600 keer werpen	103	101	96	98	98	104
na 6000 keer werpen	1003	991	1005	997	1003	1001

Tabel 1

Bij 600 keer werpen kwam vijf ogen 98 keer voor.

De kans op vijf ogen kun je benaderen door $\frac{98}{600} \approx 0{,}163$.

Bij 6000 worpen is deze benaderde kans $\frac{1003}{6000} \approx 0{,}167$.

De laatste schatting is betrouwbaarder omdat er meer experimenten zijn gedaan.

Opgave 1

Lees de **Uitleg**.

a Waarom is bij het gooien met twee dobbelstenen de kans op tien ogen kleiner dan die op zeven ogen?

b Hoe zou je de kans dat je wiskundeleraar morgen ziek is kunnen vinden?

c Hoe zou je de kans kunnen bepalen dat een ouderpaar dat allebei bruine ogen heeft ook een kind met bruine ogen krijgt?

d Waarom is de kans dat je met een dobbelsteen een even aantal ogen gooit 50%?

e Hoe kom je aan de kans van 80% dat Ajax een bepaalde wedstrijd wint?

Opgave 2

In de tabel in de **Uitleg** zie je de uitkomsten van worpen met een dobbelsteen.

a Hoe groot schat je de kans op vier ogen bij het 600 keer werpen met een dobbelsteen?

b En hoe groot schat je die kans bij het 6000 keer werpen?

c Lijkt de conclusie gerechtvaardigd dat dit een zuivere dobbelsteen is?

Opgave 3

Iemand vraagt zich af hoe groot de kans is dat een punaise, als hij valt, met de punt naar boven komt te liggen.

a Hoe kun je een benadering krijgen van deze kans? Voer dit ook uit.

b Welke kans heb je gevonden?

c Zou je die kans nauwkeuriger kunnen bepalen? Zo ja, hoe dan?

Figuur 2

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

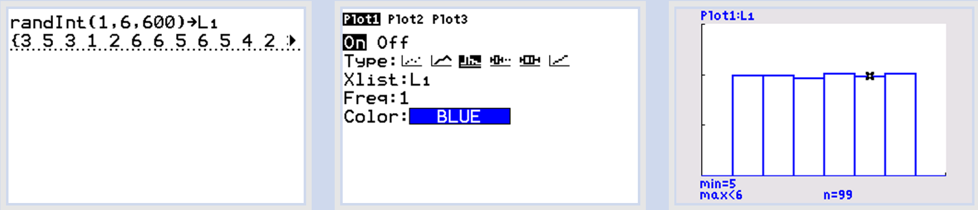
Als je heel vaak met een dobbelsteen gooit, dan voer je een **kansexperiment** uit. Een mogelijke **uitkomst** of gebeurtenis is dan bijvoorbeeld het werpen van vijf ogen.

Een gebeurtenis kan bestaan uit meerdere uitkomsten. De **relatieve frequentie** van die gebeurtenis is:

$$\frac{\text{het aantal keren dat die gebeurtenis voorkomt}}{\text{het aantal herhalingen van het kansexperiment}}$$

Volgens de **wet van de grote aantallen** benadert deze relatieve frequentie (als het kansexperiment eindeloos wordt herhaald) een bepaald getal. Dit getal noem je de **experimentele kans** op die gebeurtenis.

Relatieve frequenties zijn soms ook te bepalen uit statistische diagrammen. Dit staafdiagram geeft de relatieve frequenties bij het 600 keer werpen met een dobbelsteen weer. Het is gemaakt door het werpen met de dobbelsteen na te bootsen, te **simuleren**, met een grafische rekenmachine. Zie het **Practicum**.



Figuur 3

De experimentele kans op vijf ogen is in dit geval bij benadering $\frac{99}{600}$.

Voorbeeld 1

Je gooit heel vaak met een dobbelsteen en turft hoe vaak er drie ogen boven komen.
Bepaal zo de experimentele kans op deze gebeurtenis.

Je gooit daarna heel vaak met twee dobbelstenen en turft hoe vaak er bij elkaar drie ogen boven komen.
Bepaal zo ook de experimentele kans op deze gebeurtenis.
In het **Practicum** kun je dit simuleren.

Antwoord

Je gooit bijvoorbeeld 100 keer met die dobbelsteen en er komt zeventien keer drie ogen boven te liggen.

De relatieve frequentie van de gebeurtenis ‘3 ogen liggen boven’ is dan $\frac{17}{100}$.

De kans op drie ogen is volgens dit experiment dus bij benadering 0,17.

Je gooit vervolgens 100 keer met twee dobbelstenen en er komt zes keer drie ogen boven te liggen.

De relatieve frequentie van de gebeurtenis ‘3 ogen liggen boven’ is dan $\frac{6}{100}$.

De kans op de drie ogen is volgens dit experiment dus bij benadering 0,06.

Kun je verklaren waarom de kans op drie ogen bij het werpen met twee dobbelstenen kleiner is dan bij het werpen met één dobbelsteen?

Opgave 4

Je kunt het werpen met één of met twee dobbelstenen zelf uitvoeren.

a Werp 100 keer met één dobbelsteen en houd bij hoe vaak je 1, 2, 3, 4, 5, of 6 ogen krijgt. Welke experimentele kans op zes ogen vind je?

b Werp 100 keer met twee dobbelstenen en houd bij hoe vaak je 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, of 12 ogen krijgt. Welke experimentele kans op zeven ogen vind je?

c Is bij jou bij het werpen met twee dobbelstenen de experimentele kans op zeven ogen ook groter dan die op tien ogen?

d Kun je beredeneren met de wet van de grote aantallen waarom dit (ook als het bij jou niet klopt) toch het geval is?

Voorbeeld 2

Soms kun je experimenten ook nabootsen. Dat heet simulatie. Daarbij maak je gebruik van de random-functie ('random' is Engels voor willekeurig) van de grafische rekenmachine: elke gebeurtenis wordt voorgesteld door een getal.

Bij simuleren moet je erop letten dat voor elke gebeurtenis geldt: de werkelijke kans is gelijk aan de kans in de simulatie.

De random-functie genereert een willekeurig decimaal getal tussen 0 en 1. Dat kan bijvoorbeeld 0,3958484103 zijn. De kans op elk van die getallen is gelijk.

De kans op een getal tussen 0 en 0,5 is dus 0,5.

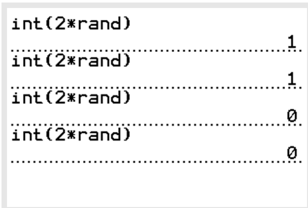
Verdubbel je alle getallen, dan krijg je een getal tussen 0 en 2.
De kans op een getal tussen 0 en 1 is nu dus 0,5.

Laat je vervolgens alle cijfers achter de komma weg, dan blijft er alleen een 0 of een 1 over. De kans op 0 is nu dus 0,5. En omdat er verder alleen een 1 wordt gegenereerd, is de kans daarop ook 0,5.

Het weghalen van de cijfers achter de komma gaat met de integer-functie: int(2 · rand).

Je hebt nu een lijst willekeurige getallen 0 en 1. Als je voor 0 'kop' leest en voor 1 'munt', heb je het werpen met een geldstuk gesimuleerd. Dit experiment kun je gemakkelijk 500 maal uitvoeren met de grafische rekenmachine. Het voordeel is dat dit minder tijd kost dan 500 keer gooien met een geldstuk.

Onderzoek of de kans op 'kop' inderdaad op den duur ongeveer 0,5 wordt.



Figuur 4

Doe het voorgaande voorbeeld nog eens, maar nu met behulp van simulatie. Bekijk eventueel het bijbehorende **Practicum: Simulaties en tellen met de GR**.

Opgave 5

Met toevalsgetallen op de grafische rekenmachine kun je het werpen met een dobbelsteen simuleren. Daartoe vermenigvuldig je elk toevalsgetal (die liggen immers tussen 0 en 1) met 6 en laat je de cijfers achter de komma weg.

a Welke mogelijke getallen krijg je?

b Wat moet je doen om de getallen 1 tot en met 6 in beeld te krijgen?

c Leg nu uit hoe je het werpen met een dobbelsteen kunt simuleren met de grafische rekenmachine.

d Simuleer 600 worpen met een dobbelsteen.
Hoe groot schat je de experimentele kans op vijf ogen?

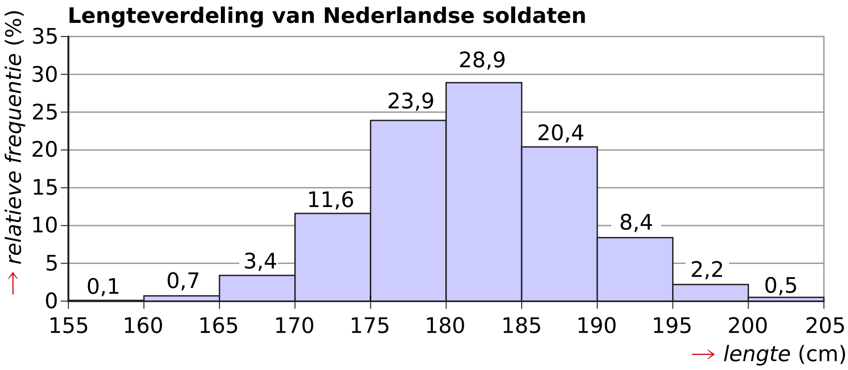
Je kunt ook het werpen met een achtkantige dobbelsteen met ogen 1 t/m 8 simuleren met de grafische rekenmachine.

e Leg uit hoe dat gaat en maak ook nu een staafdiagram van de uitkomsten van 600 worpen met een achtkantige dobbelsteen. Hoe groot schat je de experimentele kans op vijf ogen bij het werpen met een achtkantige dobbelsteen?

Voorbeeld 3

Bekijk de relatieve frequenties van de lichaamslengtes van 500 Nederlandse soldaten. Een fabrikant van truien voor de Nederlandse soldaten maakt deze in een aantal maten. De maat S (small) bijvoorbeeld is bedoeld voor soldaten tot 175 cm lengte.

Welk deel van zijn truien produceert hij in maat S als hij dit diagram ziet?



Figuur 5

Antwoord

Met behulp van dit diagram ziet de fabrikant dat 15,8% van de gemeten soldaten maat S heeft. Hij kan dit volgens de experimentele wet van de grote aantallen opvatten als de kans dat een willekeurige Nederlandse soldaat die maat heeft. Het is dus een schatting van het percentage truien met maat S dat hij zou moeten laten maken.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 3**. Je ziet het staafdiagram met de lengteverdeling van 500 Nederlandse soldaten. De fabrikant van truien voor het leger heeft ook de maten medium (M) voor soldaten vanaf 1,75 m tot en met 1,90 m en large (L) voor soldaten vanaf 1,90 m.

a Hoe groot schat je de kans dat een Nederlandse soldaat een trui met maat M nodig heeft? Geef de kans als getal tussen 0 en 1.

b Hoe groot schat je de kans dat een Nederlandse soldaat een trui met maat L nodig heeft? Geef de kans als getal tussen 0 en 1.

c De fabrikant bepaalt op grond van deze experimentele kansen hoeveel truien van elke maat hij zal maken als er een grote bestelling binnenkomt. Maar hij krijgt te horen dat maat L niet bevalt: voor soldaten van meer dan 2,00 m lengte zijn deze truien te klein. Hij besluit een maat XL in te voeren voor deze soldaten.
Hoeveel procent van zijn truien zal hij in maat XL laten produceren?

Opgave 7

Bekijk de informatie over het voorkomen van kleurenblindheid:

	man	vrouw	totaal
kleurenblind	479	58	537
niet kleurenblind	5226	4237	9463
totaal	5705	4295	10000

Tabel 2

a Je komt een man uit deze groep tegen en wilt de kans schatten dat hij kleurenblind is.
Welk getal beschouw je dan als 'aantal herhalingen van het kansexperiment' en welk getal als 'aantal keren dat die gebeurtenis voorkomt'?

b Hoe groot is die kans? Rond af op gehele procenten.

c Hoe groot is de kans dat de volgende persoon die je tegenkomt een kleurenblinde man is? Rond af op gehele procenten.

d Verklaar waarom het antwoord bij b verschilt van dat bij c.

Verwerken

Opgave 8

Stel je werpt met twee dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak met daarop de getallen 1 tot en met 4. Je let op de som van de getallen die onder komen te liggen.

Simuleer met behulp van de grafische rekenmachine 24 worpen met twee van deze dobbelstenen. Hoe groot is je benadering van de experimentele kans op uitkomst 3?

Opgave 9

In welke van de onderstaande gevallen kun je de kans bepalen door een simulatie met de grafische rekenmachine? Verklaar ook steeds waarom.

a De kans op 6 bij het werpen met twee dobbelstenen.

b De kans op 6 bij het werpen met een dobbelsteen die aan één kant zwaarder is.

c De kans op 6 bij het werpen met een dobbelsteen waar op de zijvlakken 1, 1, 3, 4, 4 en 6 stippen voorkomen.

Opgave 10

Twee spelers A en B spelen een spel. Beiden hebben twee lucifers waarvan ze er (zonder dat aan elkaar te laten zien) nul, één of twee in de hand nemen die ze vervolgens dichtgeknepen voor zich op tafel leggen. Tegelijk laten ze elkaar zien hoeveel lucifers ze in de hand hebben. A wint als beide aantallen lucifers precies één verschillen, anders wint B. Ga ervan uit dat het aantal lucifers dat de spelers in de hand nemen uitsluitend van het toeval afhangt.

a Hoe zou je dit spel kunnen simuleren met toevalsgetallen?

b Geef schematisch alle mogelijkheden van het spel weer.

c Denk je dat dit spel eerlijk is? Met andere woorden hebben A en B een gelijke kans om te winnen?

Opgave 11

Je onderzoekt of een gegeven dobbelsteen met zes vlakken al dan niet zuiver is. Je gooit de dobbelsteen twintig keer. De resultaten staan in de tabel.

resultaat	1	2	3	4	5	6
aantal worpen	4	6	2	3	2	3

Tabel 3

a Kun je op basis van deze gegevens zeggen of de dobbelsteen wel of niet zuiver is?

b Na nog tachtig keer gooien maak je de volgende tabel.

resultaat	1	2	3	4	5	6
aantal worpen	12	24	11	14	9	10

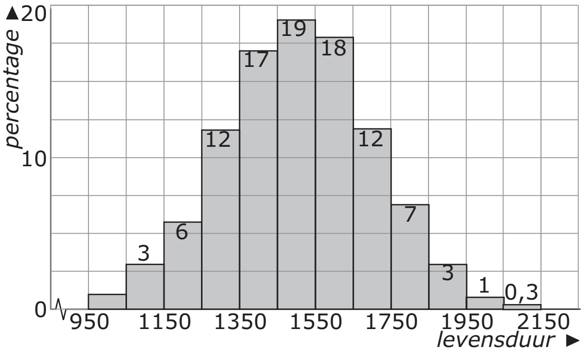
Tabel 4

Kun je nu zeggen of de dobbelsteen wel of niet zuiver is?

c Neem de resultaten in de tabel bij b als maatstaf. Je gooit de dobbelsteen 500 keer. Hoe vaak komt 2 boven te liggen?

Opgave 12

Een fabrikant heeft steekproefsgewijs de levensduur in uren van zijn gloeilampen onderzocht. Je ziet de gegevens weergegeven in een tabel en een diagram. Ga ervan uit, dat de gegevens uit de steekproef maatgevend zijn voor alle lampen van deze fabrikant.



Figuur 6

levensduur	aantal
950 - < 1050	4
1050 - < 1150	9
1150 - < 1250	19
1250 - < 1350	36
1350 - < 1450	51
1450 - < 1550	58
1550 - < 1650	53
1650 - < 1750	37
1750 - < 1850	20
1850 - < 1950	9
1950 - < 2050	3
2050 - < 2150	1

Tabel 5

a Hoeveel lampen zaten er in de steekproef?

b Hoe groot is de kans dat een lamp niet meer dan 1250 uur brandt? Rond af op gehele procenten.

c Hoe groot is de kans dat een lamp minstens 1650 uur mee gaat? Rond af op gehele procenten.

d Schat de kans dat de levensduur van een lamp meer dan 100 uur van het gemiddelde afwijkt.

Opgave 13

In deze tabel worden de resultaten van het schoolexamen (S.E.) en het centraal examen (C.E.) van een bepaalde school vergeleken. De getallen zijn percentages die zijn ontstaan uit gemiddelden over vele jaren.

			S.E.		
C.E.	4	5	6	7	8
5	10	11	8	3	0
6	5	5	14	13	4
7	0	2	7	12	6

Tabel 6

a Hoe groot is de kans dat iemand die op het S.E. een 5 scoort, op het C.E. een voldoende haalt? Geef het antwoord als breuk.

b Hoe groot is de kans dat iemand op het C.E. beter scoort dan op het S.E.? Geef het antwoord als breuk.

Toepassen

Opgave 14: Online computerspel

Een online computerspel verdeelt z'n spelers in rangen van 0 tot en met 5: spelers met rang 0 zijn beginners, en die met rang 5 worden gezien als heel ervaren spelers. Bij ieder potje worden door een complex algoritme twee online spelers uitgekozen en tegen elkaar gepit. Als het goed is, hebben de spelers dezelfde rang (om het eerlijk te houden), maar dit lukt niet altijd. In dat geval wordt er gezocht naar een speler met één rang hoger of lager (dus rangverschil 1), en als dat niet lukt, wordt er wéér een rang hoger of lager gekeken (rangverschil 2). Zo gaat het door tot je een tegenstander hebt.

rang	0	1	2	3	4	5
0	458	108	75	35	8	0
1	135	521	159	89	27	5
2	84	121	409	154	92	36
3	34	86	146	388	137	81
4	8	26	98	126	535	101
5	3	7	30	92	123	463

Tabel 7

De ontwikkelaars van het spel willen graag weten of hun algoritme goed werkt en houden bij hoe spelers van verschillende rangen uitgekozen worden. Hierbij bekijken ze 5000 gespeelde spelletjes. De resultaten staan in de tabel.

Wat je ziet is hoe vaak een uitdagende speler (verticaal) van een bepaalde rang gepit wordt tegen een ontvangende speler (horizontaal) van een bepaalde rang.

Hoe groot is de kans dat het algoritme twee spelers van een verschillende rang tegen elkaar plaatst? Geef je antwoord in procenten. Rond af op twee decimalen.

Testen

Opgave 15

Bij een bepaald spel horen twee viervlaksdobbelstenen waarop de getallen 1 tot en met 4 staan.

a Stel je voor dat je er niet zeker van bent dat bij deze dobbelstenen elk vlakje een even grote kans heeft om boven te komen. Hoe kun je jezelf ervan overtuigen dat dit toch het geval is?

b Waarom kun je vraag a niet beantwoorden met een simulatie met de grafische rekenmachine?

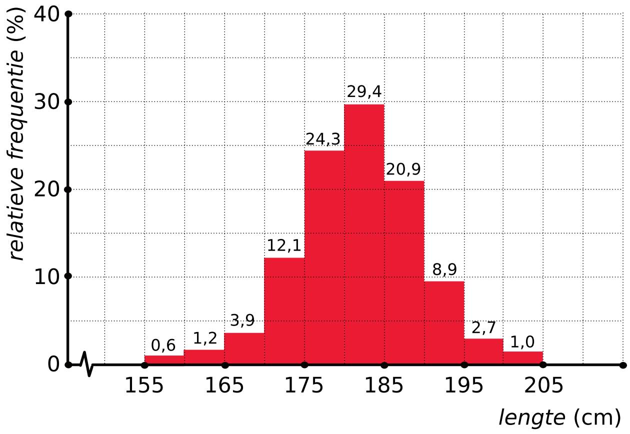
c Neem aan, dat de dobbelsteen eerlijk is. Simuleer nu met behulp van je grafische rekenmachine 80 worpen met deze dobbelsteen. Maak een staafdiagram van de uitkomst.

d Hoe groot is de experimentele kans op in totaal vier ogen?

Opgave 16

Dit histogram laat de relatieve frequenties zien van de lichaamslengtes van 500 soldaten. Een fabrikant van legertruien gaat ervan uit dat deze relatieve frequenties opgaan voor alle soldaten in Nederland. Hij maakt truien in drie maten:

- S (small) voor soldaten tot 180 cm.
- M (medium) voor soldaten van 180 cm tot 190 cm.
- L (large) voor soldaten vanaf 190 cm.



Figuur 7

a Een soldaat krijgt een nieuwe trui. Hoe groot is de kans dat hij een trui van maat S moet hebben? Geef je antwoord in procenten.

b Bereken ook voor de andere twee maten de kans (in procenten) dat een trui van die maat nodig is.

c De commandant van een legerplaats bestelt 300 truien. Hoeveel van elke maat kan hij het beste kopen?

Opgave 17

Bij een onderzoek naar linkshandigheid is bij 9000 mensen gevraagd naar hun voorkeurshand. De resultaten vind je in de tabel in percentages. Ga ervan uit, dat deze gegevens maatgevend zijn voor alle Nederlanders.

	linkshandig	rechtshandig
man	11,8	88,2
vrouw	9,6	90,4

Tabel 8

a Je komt op straat een Nederlandse man tegen. Hoe groot is de kans dat hij linkshandig is? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

b Als je daarna een andere willekeurige Nederlander tegenkomt, hoe groot is dan de kans dat die een linkshandige persoon is? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

c Hoeveel van de ondervraagde mensen waren linkshandig?

Practicum

Bekijk de applet.

Met de volgende practica kun je leren hoe je **simulaties met de grafische rekenmachine** kunt uitvoeren. Je vindt er ook informatie die je verderop bij dit onderwerp nodig hebt. Die kun je nu eerst even laten zitten.

- **Simulaties en de TI84**
- **Simulaties en de TInspire**
- **Simulaties en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en de HPprime**
- **Simulaties en de NumWorks**

Je kunt ook eenvoudig met Excel kansspelen simuleren. Gebruik dit Excel-bestand:
Simulatie van kansspelen.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.