

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Afgeleide functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- definitie afgeleide — vergelijking raaklijn
- differentieerregels — machtsregel voor gehele positieve n — somregel — constante-regel
- extremen — tekenschema afgeleide
- kettingregel

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen — vergelijking van een raaklijn opstellen
- afgeleiden bepalen m.b.v. differentieerregels
- extremen berekenen m.b.v. de afgeleide
- afgeleiden berekenen uit transformaties, met name die van $f(ax + b)$ uit die van f

Achtergronden

De differentiaalrekening is min of meer tegelijkertijd en zonder dat ze het van elkaar wisten door twee van de allergrootste geleerden van hun tijd uitgevonden:

- In Engeland bedacht **sir Isaac Newton** zo rond 1665 zijn 'fluxierekening' toen hij zich in die periode bezig hield met beweging, snelheid en versnelling. Hij publiceerde zijn resultaten echter niet.
- In Duitsland schreef **Gottfried Wilhelm Leibniz** in 1675 het manuscript waarin hij zijn theorie rond het berekenen van hellingen en van oppervlaktes onder krommen uiteen zette.

Lees ook op deze site: [Grafieken en verandering, differentiaalrekening](#).

Testen

Opgave 1

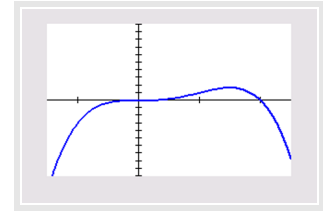
Differentieer de functies.

- a** $f(x) = 4x^5 - 12x^2 + 60x + 100$
- b** $E(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$
- c** $g(x) = ax^3 + 4x - 3$
- d** $h(x) = (2x + 5)^{10}$
- e** $f(x) = -2(3,5x - 6)^5$
- f** $P(x) = 12x^2 - (0,25x - 4)^3$

Opgave 2

Bekijk de grafiek van $f(x) = 2x^3 - x^4$ op het interval $[-1,5; 2,5]$.

- De grafiek heeft twee punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Bereken met behulp van differentiëren de x -coördinaten van die twee punten en geef aan of je met een maximum, een minimum of een buigpunt te maken hebt.
- De grafiek van f heeft voor $x = 1$ een raaklijn die de x -as snijdt in punt A . Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van A .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek die loodrecht staat op de raaklijn voor $x = 1$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 1

Opgave 3

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt hun afzet q , in duizendtallen, uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0,1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1,5q^3 - 22,5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

- Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?
- Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q .
- Stel een formule op voor de winst $W = TO - TK$ als functie van de afzet q .
- Bepaal met behulp van differentiëren de prijs van één autoped bij maximale winst.
- Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q .
Bepaal met behulp van differentiëren bij welke afzet GTK minimaal is.

Opgave 4

Gegeven zijn de functies: $f(x) = (x^2 - 4)(2x + 1)$ en $g(x) = x^2 - 4$.

- Bepaal algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van f .
- Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = (2x - 1)^3 - 4(2x - 1)$. De grafiek van deze functie kan ontstaan uit die van $g(x) = x^3 - 4x$ door twee transformaties toe te passen.

- Welke twee transformaties zijn dat en in welke volgorde moet je ze toepassen?
- Laat zien hoe je de afgeleide van f kunt herleiden uit die van g .
- Bereken met behulp van de afgeleide de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Gegeven is voor elke reële waarde van p de functie $f(x) = x^4 - 2px^2$.

Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f twee extremen met een waarde van -4 ?

Opgave 7

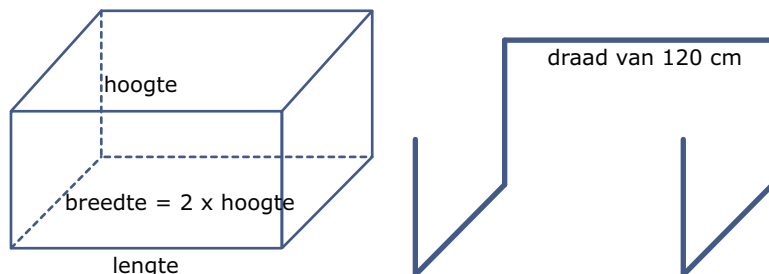
Gegeven is de functie f door $f(x) = x(6 + x)(10 - x)$.

- Bereken algebraïsch de nulpunten en de toppen van de grafiek van f .
- Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = p$ precies drie punten met de grafiek van f gemeen?
- De raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong van het assenstelsel snijdt de grafiek in nog een ander punt. Bereken algebraïsch de coördinaten van dat punt.

Toepassen

Opgave 8: Plastic bakjes

Een bedrijf maakt plastic bakjes: bodem en zijvlakken van deze bakjes zijn rechthoeken; de breedte van de bakjes is tweemaal zo groot als de hoogte. Om de bakjes te verstevigen wordt een gebogen metaaldraad met een lengte van 120 cm aangebracht zoals in de tekeningen is aangegeven.



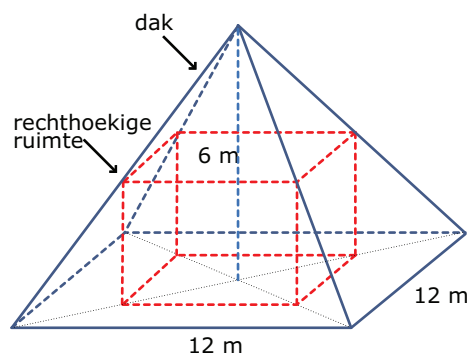
Figuur 2

- Bereken de maximale inhoud die deze bakjes kunnen krijgen.
- Als het goed is blijkt bij a dat de lengte van het bakje viermaal zo groot is als de hoogte. Toon aan dat bij elke draadlengte een maximale inhoud ontstaat als de breedte tweemaal de hoogte en de lengte viermaal de hoogte is.

Opgave 9: Piramidedak

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit er uit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant.

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?



Figuur 3

Opgave 10: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt. Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α .

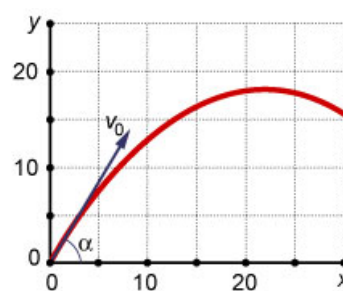
De snelheid in de x -richting is $v_0 \cdot \cos(\alpha)$. De snelheid in de y -richting is $v_0 \cdot \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee. Dus is: $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Hierin is g

de gravitatieconstante: $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$. Hiermee maak je een model in Excel: **Model kogelbaan**. Laat zien dat bij de baan de formule

$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x - \frac{g}{2v_0(\cos \alpha)^2} \cdot x^2$ hoort. Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

Zie ook deze [simulatie van de kogelbaan](#).

- Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.
- Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0 , α en g .
- Bij welke waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g .



Figuur 4

Examen

Opgave 11: Gespiegelde afgeleide

In deze opgave onderzoeken we een functie f , waarvan de afgeleide functie bestaat voor iedere waarde van x . De functie f wordt door twee verschillende formules bepaald: een formule voor $x \leq 3$ en een formule voor $x \geq 3$. Voor $x = 3$ leveren beide formules dezelfde functiewaarde. De formule voor $x \leq 3$ is gegeven. De formule voor $x \leq 3$ luidt: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$. De formule voor $x \geq 3$ kun je bepalen als je gebruik maakt van het volgende extra gegeven: De grafiek van de afgeleide functie f' is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn $x = 3$.

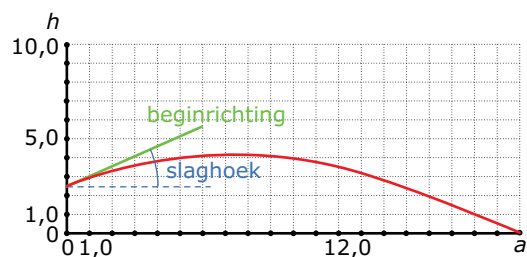
- Teken de grafiek van de afgeleide functie f en stel een formule op voor de afgeleide f' voor $x \geq 3$.
- Een formule voor de functie f voor $x \geq 3$ is van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bereken a , b en c .
- Bereken de extreme waarden van f .
- Teken de grafiek van f voor $-1 \leq x \leq 7$.

(bron: voorbeeldexamen wiskunde B1 havo 2000)

Opgave 12: Tennis

Bij sporten als volleybal en tennis is de service erg belangrijk, dat wil zeggen de manier waarop de bal in het spel gebracht wordt. We bekijken hier de service bij tennis. De speler staat bij het serveren 12 meter van het net. Het net is 1 meter hoog. We nemen aan dat de speler de bal raakt op een hoogte van 2,5 meter boven de grond en ter vereenvoudiging gaan we er van uit dat de speler de bal precies in de lengterichting van het veld slaat. In de eerste figuur zie je een mogelijke baan van de bal.

De hoogte van de onderkant van de bal in meter ten opzichte van de grond noemen we h . De horizontale afstand in meter noemen we a . Het verband tussen h en a hangt af van de snelheid waarmee de bal geslagen wordt en van de beginrichting. Deze beginrichting wordt bepaald door de slaghoek. Dit is de hoek waaronder de bal geslagen wordt. Zie eerste figuur.



Figuur 5

- Neem aan dat de bal onder een hoek van 15° geslagen wordt met een snelheid van v m/s. Bij deze hoek geldt bij benadering het volgende verband tussen a en h :

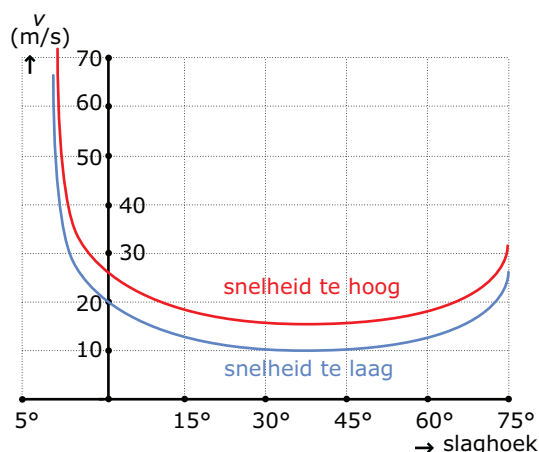
$$5,36h = \frac{-5,36}{v^2}a^2 + 0,27a + 2,50$$

Een speler slaat de bal met een snelheid van 17 m/s. Bereken met behulp van differentiëren de grootste hoogte boven de grond die deze bal bereikt.

In deze vereenvoudigde situatie spreken we van een geldige service als:

- de speler die serveert 12 meter van het net staat;
- de bal precies in de lengterichting van het veld geslagen wordt;
- de bal over het net gaat zonder dit te raken;
- de bal neerkomt op een afstand van ten hoogste 7 meter voorbij het net.

In een artikel over dit onderwerp stond deze grafiek. Daarin is weergegeven bij welke combinaties van slaghoek en snelheid een geldige service verkregen wordt. Een speler die de bal slaat onder een hoek van 30° moet volgens deze grafiek de bal slaan met een snelheid van ongeveer 11 tot 13 m/s. Slaat hij te zacht dan komt de bal niet over het net. Slaat hij te hard dan komt de bal te ver voorbij het net op de grond. Een profspeler slaat bij een geldige service de bal met een snelheid van 150 km/h.



Figuur 6

- b** Bepaal met behulp van de grafiek de beginrichting van een mogelijke baan van deze bal.

Neem nu aan dat de bal onder een hoek van 10° geslagen wordt. Bij deze hoek geldt bij benadering de volgende formule voor het verband tussen a en h :

$$5,16h = -\frac{5,36}{v^2}a^2 + 0,18a + 2,50$$

Voor een geldige service moet de bal over het net gaan zonder dit te raken. De snelheid is te laag als in bovenstaande formule bij afstand $a = 12$ de hoogte $h \leq 1$ is. Volgens de grafiek is een snelheid van 16 m/s of minder te laag voor een geldige service. Echter, met behulp van een berekening is na te gaan dat de figuur hier erg onnauwkeurig is getekend.

- c** Welke snelheden (in m/s) zijn volgens de formule te laag voor een geldige service? Geef je antwoord in ten minste één decimaal nauwkeurig.
- Voor een geldige service moet de bal bovendien ten hoogste 7 meter voorbij het net de grond raken. Uit deze eis volgt ook een voorwaarde voor v .
- d** Welke getallen moet je in de bovenstaande formule invullen om deze voorwaarde te krijgen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A vwo 2000, eerste tijdvak)

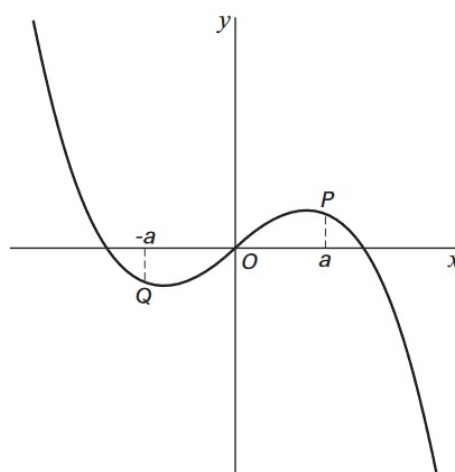
Opgave 13: Derdegraads functie

In de figuur is de grafiek getekend van de functie $f(x) = 300x - x^3$.

De grafiek van f heeft twee toppen.

- a** Stel een functievoorschrift van f' op en bereken daarmee de coördinaten van beide toppen.
- Op de grafiek van f ligt punt P met x -coördinaat a . Hierbij is a een willekeurig positief getal.
- Q is het punt op de grafiek van f met x -coördinaat $-a$.
- b** Onderzoek met behulp van de afgeleide f' of de raaklijnen aan de grafiek van f in de punten P en Q evenwijdig zijn.

(bron: examen havo wiskunde B in 2003, eerste tijdvak)



Figuur 7



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
