

3.5 Van 3D naar 2D

Inleiding

Onze wereld is driedimensionaal: 3D. Maar daarin is het vaak nogal lastig om bepaalde afmetingen te berekenen. Berekeningen doe je het liefst in driehoeken, want dan kun je allerlei bekende rekenmethodes gebruiken. Je maakt dus van een 3D probleem meestal een 2D probleem.

Je leert in dit onderwerp

- problemen in ruimtelijke figuren vertalen naar berekeningen in platte vlakken;
- (analytische) meetkunde toepassen in 3D.

Voorkennis

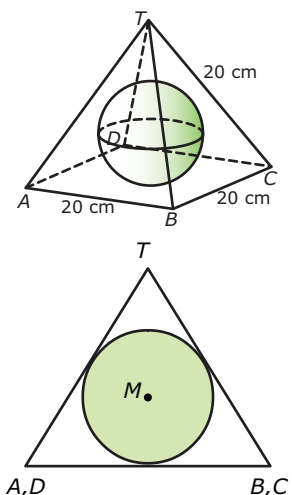
- werken met lijnen en cirkels in het platte vlak;
- werken met goniometrie, de sinusregel en de cosinusregel.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 20 cm lang zijn. De vraag is hoe groot de grootste bol is die nog juist binnen de piramide past. In het vooraanzicht zie je beter hoe die bol er uit ziet. Om aan te geven dat A en D recht achter elkaar liggen staat links onder bij de figuur A,D .

- In welke richting bekijk je de figuur als je dit vooraanzicht ziet?
- Je wilt de straal van de bol berekenen. Kun je die op (een) geschikte plek(ken) in de figuur aangeven?
- Kun je driehoeken bedenken waarin je die straal zou kunnen uitrekenen?



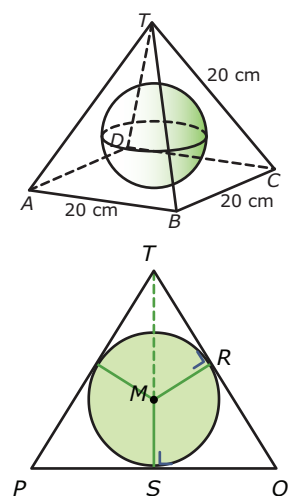
Figuur 1

Uitleg

Om de straal te berekenen van de grootste bol die nog in deze piramide past, moet je bedenken dat deze bol precies tegen de zijvlakken van de piramide aan gaat komen. Om dat goed te kunnen zien kun je het beste even de aanzichten van piramide met bol bekijken.

Het vooraanzicht dat hier is getekend, is hetzelfde als $\triangle PQT$ als P het midden van AD en Q het midden van BC is. Dit noem je een doorsnede van de piramide met bol en het vlak door T , P en Q . Hierin is de bol een cirkel die raakt aan PQ , PT en QT . Er zijn dus stralen vanuit het middelpunt M te tekenen die loodrecht op deze zijden staan. Van $\triangle PQT$ weet je alle zijden: $PQ = 20$ en $PT = QT = \sqrt{300}$.

Neem je r voor de straal van de bol, dan kun je de gelijkvormigheid van de driehoeken QST en MRT gebruiken om r uit te rekenen.



Figuur 2

Opgave 1

Bekijk het probleem in de [Uitleg](#).

- a Waarom is het handig om een geschikte doorsnede te tekenen?
- b Laat met een berekening zien, dat $PT = QT = \sqrt{300}$.
- c Je weet dat $|MS| = r$. Laat zien dat $|TM| = \sqrt{200} - r$.
- d Waarom zijn de driehoeken QST en MRT gelijkvormig?
- e Bereken nu r in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Bij de vorige opgave is het werken met gelijkvormigheid niet echt noodzakelijk. Je kunt ook werken met goniometrie en bijvoorbeeld $\angle Q$ uitrekenen. Laat zien, hoe je zo r berekent op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Een ander probleem is: "Hoeveel bedraagt de afstand van deze bol tot de ribben van de piramide?"

- a Nu is $\triangle ACT$ een geschikte doorsnede om de gevraagde afstand uit te rekenen. Waarom?
- b Teken zelf die driehoek op schaal en teken de cirkel die de bol voorstelt er in. (De straal heb je in de voorgaande opgaven uitgerekend.)
- c Geef in je figuur de gevraagde afstand aan.
- d Bereken de gevraagde afstand. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden**Om te onthouden**

Onze wereld is driedimensionaal. Maar daarin is het vaak nogal lastig om bepaalde afmetingen te berekenen. Berekeningen doe je het liefst in driehoeken, want dan kun je allerlei bekende rekenmethodes zoals goniometrie, de stelling van Pythagoras, werken met gelijkvormigheid, de sinusregel en/of de cosinusregel gebruiken. Je maakt dus van een 3D probleem meestal een 2D probleem. Dit doe je door:

- een geschikte doorsnede uit de figuur te halen en die op schaal (of ware grootte) te tekenen of er een schets van te maken;
- een aanzicht te tekenen;
- een uitslag te maken;
- eventueel een geschikt assenstelsel in te voeren en analytische meetkunde toe te passen.

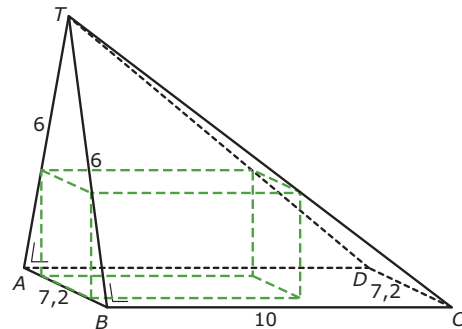
Bekijk de voorbeelden om te zien hoe dit in zijn werk kan gaan.

Voorbeeld 1

Hier zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$ is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT , ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Bereken de afmetingen van die kamer.

Antwoord

Om rechte hoeken ook inderdaad recht te zien kun je in dit geval goed met aanzichten werken. Vooral een vooraanzicht en een zijaanzicht zijn handig omdat daarin zowel de rechte hoeken als de schuine vlakken zichtbaar zijn. Aan deze twee aanzichten zie je, dat er het beste kan worden gerekend in $\triangle ABT$ (want die is gelijk aan het vooraanzicht) en in $\triangle SRT$ als S het midden van AB en R dat van CD is (deze driehoek is een doorsnede die gelijk is aan het zijaanzicht). Met gelijkvormigheid of goniometrie bereken je nu de afmetingen van de kamer.



Figuur 3

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de zolder van een twee-onder-één-kap woning. De zoldervloer $ABCD$ is een rechthoek van 10 m bij 7,2 m. De zijmuur ABT is een gelijkbenige driehoek die loodrecht op de zoldervloer staat. De vlakken BCT , ADT en DCT zijn de dakstukken. Iemand wil binnen deze zolder een zuiver rechthoekige kamer maken met een hoogte van 2,5 m. Je gaat de afmetingen van die kamer berekenen.

- Teken de twee driehoeken waarin je gaat rekenen. Bereken eerst $|TS|$ om goede figuren op schaal te kunnen tekenen.
- Zet alle bekende afmetingen in je figuren.
- Gebruik $\triangle SBT$ om de breedte van de kamer te berekenen.
- Gebruik $\triangle SRT$ om de lengte van de kamer te berekenen.

Opgave 5

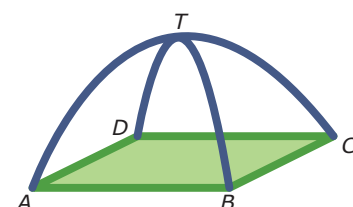
Bekijk de zolderverdieping van de twee-onder-één-kap woning in de figuur in **Voorbeeld 1**.

Wil je de dakoppervlakte berekenen (bijvoorbeeld omdat er een nieuwe dakbedekking nodig is), dan gebruik je een uitslag van de figuur.

- Teken de uitslag op schaal 1 : 200.
- Bereken de oppervlakte van het dak van deze zolderverdieping. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Een bedrijf slaat zijn afval op in een grote vierkante verdiepte betonnen bak. Om stankoverlast tegen te gaan wordt deze bak overdekt met een groot stevig tentdoek dat wordt opgespannen over twee bogen. In de figuur stelt $ABCD$ de bovenrand van de ingegraven bak voor, een vierkant van 10 m bij 10 m. De bogen ATC en BDT zijn identieke delen van een cirkel. Punt T ligt 4 m boven vlak $ABCD$. Bereken de straal van de cirkel waar zo'n boog een deel van is en bereken hoe ver het middelpunt van die cirkel onder vlak $ABCD$ ligt.



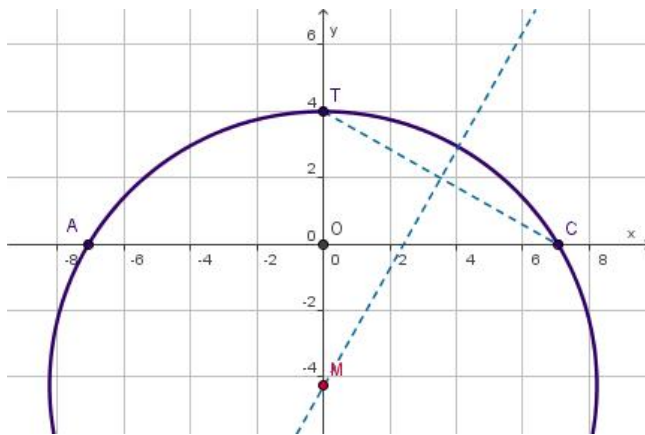
Figuur 4

Antwoord

Bekijk cirkelboog ATC . Neem aan dat het snijpunt van AC en BD de oorsprong is van een assenstelsel Oxy waarbij punt T op de y -as ligt en de punten A en C op de x -as liggen. Je kunt dan de cirkel door A , C en T construeren met GeoGebra. Je bepaalt dan eerst de coördinaten van deze punten en construeert dan het middelpunt van de bedoelde cirkel met behulp van één of twee middelloodlijnen. (Je hebt aan één middelloodlijn genoeg omdat je weet dat het middelpunt op de y -as ligt.)

Opgave 6

Bekijk het probleem in [Voorbeeld 2](#).



Figuur 5

In de grafiek zie je cirkelboog ATC in een assenstelsel.

- Laat zien dat $A(-5\sqrt{2}, 0)$ en $C(5\sqrt{2}, 0)$ is.
- Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van CT .
- Bereken de coördinaten van punt M door deze middelloodlijn de snijden met de y -as.
- Bereken nu de straal van de cirkel.

Opgave 7

Zie nogmaals cirkelboog ATC in [Opgave 6](#).

Hierbij is $A(-5\sqrt{2}, 0)$, $C(5\sqrt{2}, 0)$ en $M(0; -4,25)$.

De hoek die boog ATC met het vlak $ABCD$ maakt, is de hoek tussen deze cirkelboog en de x -as. Bereken deze hoek in graden nauwkeurig.

Opgave 8

Zie nogmaals cirkelboog ATC in [Opgave 6](#).

Hierbij is $A(-5\sqrt{2}, 0)$ en $C(5\sqrt{2}, 0)$.

Je zou de coördinaten van M en de straal van de cirkel ook kunnen vinden aan de hand van gelijkvormige driehoeken. Noem het midden van CT bijvoorbeeld S . MS is de middelloodlijn van CT .

- Leg uit waarom de driehoeken OCT en SMT gelijkvormig zijn.
- Laat zien hoe je op die manier TM berekent.

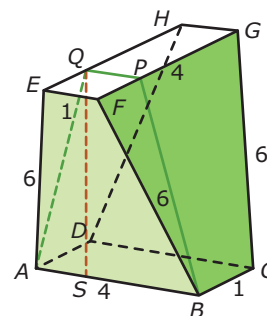
Voorbeeld 3

In de figuur zie je een betonnen zuil die wordt gebruikt in een viaduct als ondersteuning van het bovenliggende wegdek. Zowel het ondervlak $ABCD$ als het bovenvlak $EFGH$ zijn rechthoeken van 1 m bij 4 m. Alle opstaande zijvlakken zijn gelijke symmetrische trapezia. Je wilt de afstand tussen ondervlak $ABCD$ en bovenvlak $EFGH$ berekenen.

Antwoord

Die afstand kun je het beste zien in een vooraanzicht. Zo'n vooraanzicht heeft dezelfde vorm als een verticale dwarsdoorsnede $ABPQ$ van de figuur. De gevraagde afstand QS zie je in de figuur aangegeven.

Je wilt nu rekenen in de doorsnede $ABPQ$, maar dan moet je wel eerst de lengtes van AQ en BP weten. En daarvoor bekijk je één van de zijvlakken, bijvoorbeeld $BCGF$ waarin je de lengte van BP kunt berekenen.



Figuur 6

Opgave 9

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 3**.

Soms is het handig om in dit soort situaties goniometrie, of zelfs de sinusregel of de cosinusregel te gebruiken.

- a Bereken de afstand tussen de punten B en G exact.
- b Bereken de afstand tussen de punten A en G exact.

Er zitten ook allerlei hoeken in. Nu is het gebruik van goniometrie onvermijdelijk.

- c Bereken $\angle BAE$ in twee decimalen nauwkeurig.
- d Bereken $\angle AGC$ in twee decimalen nauwkeurig.

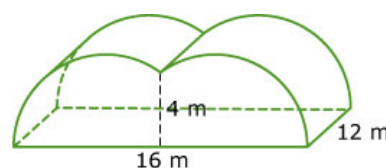
Opgave 10

De betonnen zuil in **Voorbeeld 3** heeft een bijzondere eigenschap. Als je op hoogte x boven het grondvlak een horizontale doorsnede maakt, dan heeft zo'n doorsnede altijd dezelfde omtrek.

Toon dit aan.

Voorbeeld 4

Je ziet hier een opslagruimte die bestaat uit twee in elkaar geschoven gelijke halve cilinders waarvan de middelpunten op de x -as liggen. De gegeven afmetingen staan in de figuur. Hoe hoog is deze opslagruimte?



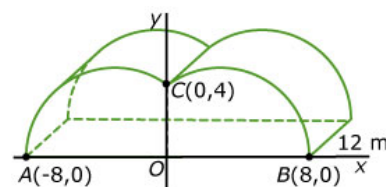
Figuur 7

Antwoord

Maak een cartesisch Oxy -assenstelsel met als oorsprong het punt recht onder het snijpunt van beide cirkels. De punten $A(-8,0)$, $B(8,0)$ en $C(0,4)$ ontstaan dan vanzelf.

Je kunt daarmee middelpunt van beide cirkels berekenen. Dit is het snijpunt van de middelloodlijn van AC (dan wel BC) met de x -as.

De middelloodlijn van AC heeft vergelijking $y = -2x - 6$. De x -as is $y = 0$. Dus hun snijpunt is $(-3,0)$. De straal van beide cirkels is daarom 5. De opslagruimte is 5 m hoog.



Figuur 8

Opgave 11

Bekijk **Voorbeeld 4**. Je wil de hoogte van de opslagruimte berekenen.

- Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van BC .
- Laat met behulp van het antwoord bij a zien, dat de opslagruimte 5 m hoog is.

Opgave 12

In het Oxy -stelsel in **Voorbeeld 4** liggen de middelpunten van de cirkels op $M_1(-3,0)$ en $M_2(3,0)$.

- Bij het grootste deel van de vloeroppervlakte hoort een hoogte van 4 meter of meer. Hoe groot is die vloeroppervlakte?
- In punt C komen twee cirkels bij elkaar. Welke hoek maken die cirkels in C met elkaar? Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

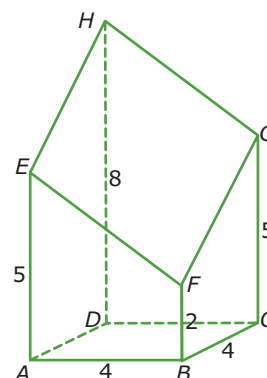
Verwerken**Opgave 13**

Een bestelbus levert schilderijen. De opslagbak achterin heeft een lengte van 2 m, breedte 1,6 m en hoogte 1,3 m. Bereken de oppervlakte van het grootste mogelijke schilderij dat erin past, in m^2 in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 14

Dit is een afgeknotte balk $ABCD.EFGH$. De afmetingen vind je in de figuur.

- Bereken de hoek tussen de lijnstukken EH en HG . Rond af op twee decimalen.
- Bereken de afstand van punt G tot de lijn EH . Rond af op twee decimalen.



Figuur 9

Opgave 15

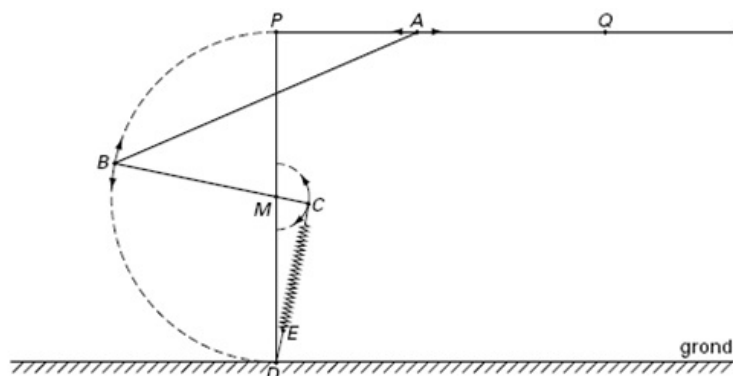
In de figuur hiernaast is een deel te zien van een kanteldeur van een garagebox. In figuur hieronder is een schematische tekening gemaakt van het zijaanzicht van deze deur. De kanteldeur is door middel van een metalen frame aan de muur bevestigd. PD en PQ zijn twee onderdelen van dat frame. Bij het sluiten en openen van de kanteldeur glijdt het hoekpunt A van deze deur langs de horizontale rail PQ . Het hoekpunt B van de deur is via een metalen arm BC verbonden met het midden M van PD . Bij het sluiten en openen doorloopt B een halve cirkel, evenals punt C . Dit punt C is door middel van een veer CE verbonden met punt D op de grond. Deze veer zorgt voor tegenwicht zodat de deur bij sluiten en openen hanteerbaar blijft.



Figuur 10

Enige gegevens:

- $AB = PQ = PD = 18$ dm.
- Het draaipunt M is het midden van PD .
- $MC = 3$ dm.



Figuur 11

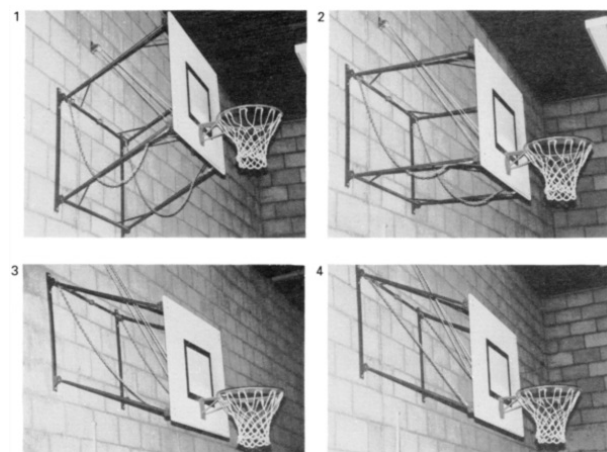
Breng een rechthoekig Oxy -assenstelsel aan, zodat dat de oorsprong punt D is, de x -as over de grond loopt evenwijdig met PQ en PD op de y -as ligt. De eenheid op beide assen is 1 dm.

- Stel een vergelijking op van de cirkel die punt C voor de helft doorloopt.
- Een aanhangwagentje, geparkeerd in de garage, is 8 dm hoog. Bereken de afstand van punt B tot lijnstuk PD als de kanteldeur AB in de stand staat waarbij het wagentje er nog net onderdoor kan rijden. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de lengte van PA als de afstand van punt B tot lijnstuk PD zo groot mogelijk is. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B1,2 in 1999, tweede tijdvak)

Opgave 16

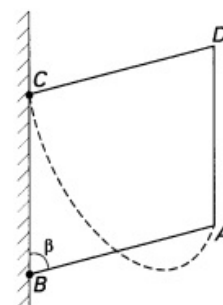
Hier zie je vier momentopnamen van het neerlaten van een basketbalbord.



Figuur 13

De stelling bestaat uit een frame met een rechthoekig bord waaraan de basket bevestigd is. Twee even lange kettingen dienen als beveiliging tegen vallen of te ver zakken van het geheel. Het zij-aanzicht van het frame is een parallellogram $ABCD$. Hierin is $BC = 90$ cm en $AB = 100$ cm. In de gymzaal waarin de foto's zijn genomen zit bevestigingspunt B op een hoogte van 280 cm van de grond. Eén van de kettingen is bevestigd in A en C . De ketting is zo lang dat bij het neerlaten van de stelling punt A niet lager kan komen dan 250 cm boven de begane grond.

- Bereken de lengte van de ketting AC in twee decimalen nauwkeurig.



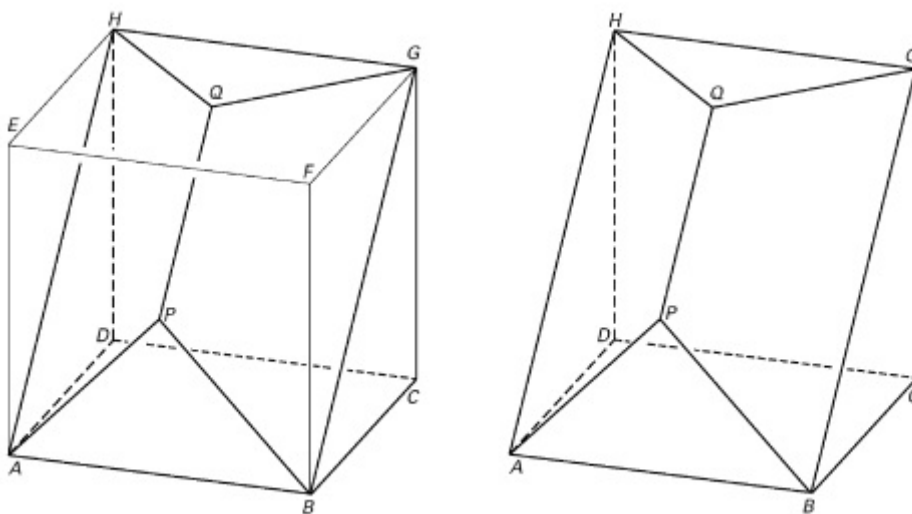
Figuur 12

- b Het frame wordt helemaal vanaf de laagste stand omhoog getrokken tot aan de muur. Tijdens deze beweging beschrijft punt A een cirkelboog. Bereken de lengte van de baan die punt A aflegt. Rond af op twee decimalen.
- c Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat A op 300 cm boven de begane grond zit in twee decimalen nauwkeurig.
- d De afstand a tussen de stangen AB en CD is de lengte van het kortste lijnstuk tussen beide. Deze lengte hangt af van de grootte van hoek β . Druk die afstand a uit in β .
- e Bereken de afstand van punt A tot de muur op het moment dat afstand a precies 45 cm is.

(bron: examen havo wiskunde B1,2 in 1994, tweede tijdvak)

Opgave 17

In de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6 cm past een lichaam L met hoekpunten A, B, C, D, P, Q, G en H . P is het snijpunt van AF en BE , Q is het snijpunt van EG en FH . In de rechter figuur is L apart getekend.



Figuur 14

- a Bereken de afstand van punt P tot punt G in één decimaal nauwkeurig.
- b Bereken de grootte van $\angle BPQ$ in graden nauwkeurig.
Punt R is het midden van GH . In het vlak door de punten P, Q en R wordt een Oxy -assenstelsel aangebracht zo, dat de oorsprong O het midden is van AB , de x -as evenwijdig is met BC en de y -as door de punten O en P gaat.
- c De afstand tussen de lijnen PQ en CD is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen beide. Teken dit lijnstuk in het beschreven assenstelsel.
- d Bereken de lengte van het in c bedoelde lijnstuk in één decimaal nauwkeurig.
- e Door P, Q en R gaat een cirkel c . Stel van deze cirkel een vergelijking op.
- f Bereken de lengte van het deel van de cirkel tussen de punten P en Q in twee decimalen nauwkeurig.

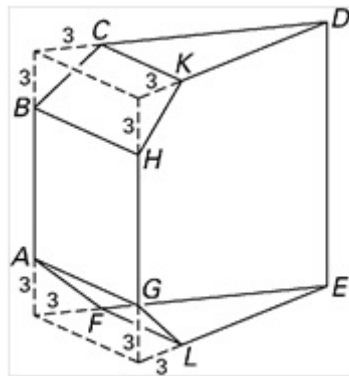
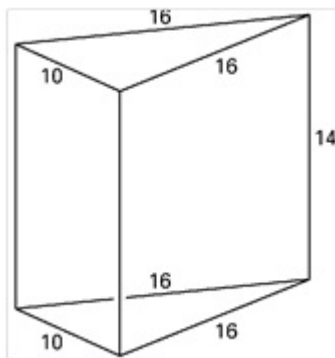
(naar: examen havo wiskunde B1,2 in 2000)

Opgave 18

In een kaaswinkel is het mogelijk om Leerdammer kaas te laten verpakken in een cadeauverpakking van karton. Zie de foto hiernaast. Bij de volgende vragen gaan we steeds uit van een model van deze kaasdoos. Dit model is ontstaan uit een recht driezijdig prisma door daaruit twee gelijke stukken weg te halen. Zie de figuren hieronder. De lijnen CK , BH , AG en FL zijn evenwijdig. De afmetingen in de figuren zijn gegeven in cm.

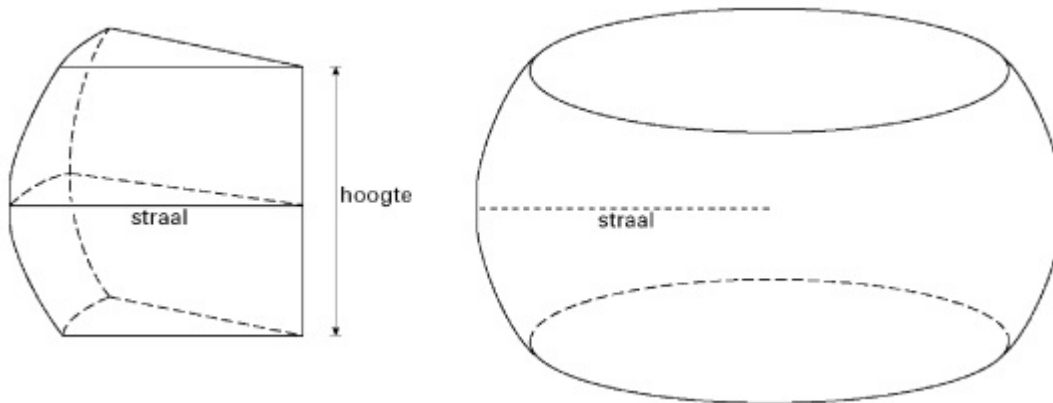


Figuur 15



Figuur 16

Hieronder is een punt van een Leerdammer kaas getekend, met daarnaast de gehele kaas. De kaas is een bolsegment, met een hoogte gelijk aan DE uit de figuur hierboven en de straal is gelijk aan de afstand van DE tot het vlak $BHGA$.



Figuur 17

- Bereken de straal van de Leerdammer kaas in één decimaal nauwkeurig.
De Leerdammer kaas wordt in een aantal gelijke punten gesneden, zoals in de figuur hierboven. Elke punt wordt verpakt in een kaasdoos. Hoe kleiner de punten, hoe meer kaasdozen er nodig zijn.
- Bereken het minimale aantal kaasdozen dat nodig is om al deze punten te verpakken.

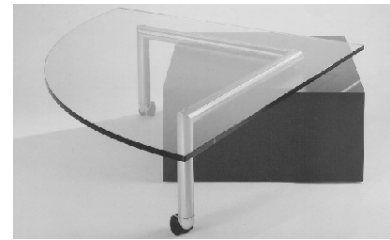
- c Teken op schaal 1 : 2 een dwarsdoorsnede van de kaasdoos door de punten D en E en het midden van AG . Teken daarin ook de dwarsdoorsnede van de kaaspunt en onderzoek of die kaaspunt ook echt in de kaasdoos past.
- d Eén van de zijvlakken van de kaasdoos is vlak $BHCK$. Teken dit vlak op ware grootte en bereken de grootte van de hoeken van dit vlak in graden nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B1,2 in 2001, tweede tijdvak)

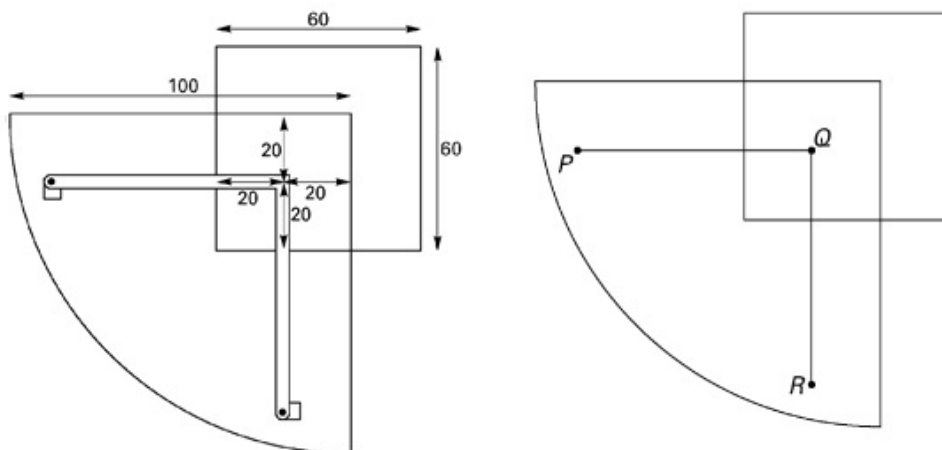
Testen

Opgave 19

De tafel op deze foto bestaat uit een rechthoekig blok en een glazen plaat in de vorm van een kwart cirkel. De glazen plaat is gemonteerd op een metalen buizenconstructie met drie poten. Eén van de poten is bevestigd in het blok. De afstand van deze poot tot de twee dichtstbijzijnde ribben van het blok is 20 cm; de afstand tot de rechte zijden van de glasplaat is ook 20 cm. Enkele maten van blok en glasplaat zijn aangegeven in het bovenaanzicht in de linker figuur hieronder. In deze opgave wordt de dikte van de poten verwaarloosd. In de rechter figuur is dit schematisch aangegeven. P , Q en R zijn de punten op de glasplaat recht boven de poten. De glasplaat kan draaien om de poot in het blok (onder het punt Q).



Figuur 18



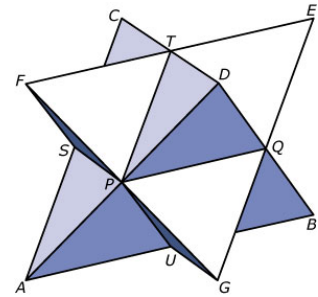
Figuur 19

- a Bereken hoe lang PQ en RQ in minimaal moeten zijn om draaien van de glasplaat over 360° mogelijk te maken. Rond je antwoord naar boven af op een geheel aantal centimeters.
Als de glasplaat gaat draaien om punt Q dan beschrijven de twee punten op de glasplaat die het verst van Q af liggen dezelfde cirkel c met middelpunt Q . Breng een assenstelsel aan met als oorsprong punt Q en de assen evenwijdig aan de zijden van het rechthoekige blok waar de tafel op gemonteerd is.
- b Stel een vergelijking op van cirkel c .
In een kamer wordt de tafel met een zijvlak van het blok tegen een muur gezet zo, dat punt Q dan 40 cm van de muur aflight. Er zijn twee punten A en B waar de glasplaat tegen de muur kan komen.
- c Bereken de afstand tussen de twee punten A en B waar de glasplaat tegen de muur kan komen. Geef je antwoord in gehele centimeters nauwkeurig.
- d Als de glasplaat tegen de muur rust, dan maakt de cirkelvormige rand van de glasplaat een bepaalde hoek met de muur. Bereken de grootte van die hoek in graden nauwkeurig.

(naar: examen wiskunde B1,2 in 2000)

Opgave 20

De figuur die je hiernaast ziet heet een Keplerster, genoemd naar de astronoom **Johannes Kepler (1571–1630)**. Je kunt de figuur opvatten als twee regelmatige viervlakken door elkaar, namelijk de viervlakken $ABCD$ en $EFGH$. Van die viervlakken zijn alle ribben 8 cm. Viervlak $ABCD$ en viervlak $EFGH$ doordringen elkaar zo, dat de ribben middendoor gedeeld worden. P, Q, R, S, T en U zijn de middens van de ribben van de twee viervlakken.



Figuur 20

- a Bereken de afstand tussen de punten T en U exact.
- b Punt M is het midden van PS . Bereken de grootte van $\angle AMF$. Rond af op één decimaal.
- c De kleinste bol waar de Keplerster nog precies in past gaat door de punten A, B, E en F . De doorsnede van vlak $ABEF$ en die bol is een cirkel c . Bereken de straal van c exact.
- d Bereken ook de lengte van de cirkelboog tussen de punten E en F . Rond af op één decimaal.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
