

## 3.4 Afstanden berekenen

### Inleiding

Onder de afstand tussen twee objecten versta je altijd de kortste afstand. Maar wat is de kortste afstand van een punt tot een lijn? Of tussen twee lijnen, of een lijn en een cirkel, of tussen twee cirkels? Door je telkens de meetkundige situatie voor te stellen kun je deze vragen beantwoorden.

#### Je leert in dit onderwerp

- de afstand van een punt tot een lijn berekenen en dit toepassen.

#### Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- de vergelijking van een lijn loodrecht op een andere gegeven lijn opstellen.

### Verkennen

#### Opgave V1

Teken lijn  $l: 2x + 4y = 16$  en punt  $A(3,5)$ .

Hoe groot is de afstand van punt  $A$  tot lijn  $l$ ? En hoe bereken je die?

#### Uitleg

##### Bekijk de applet

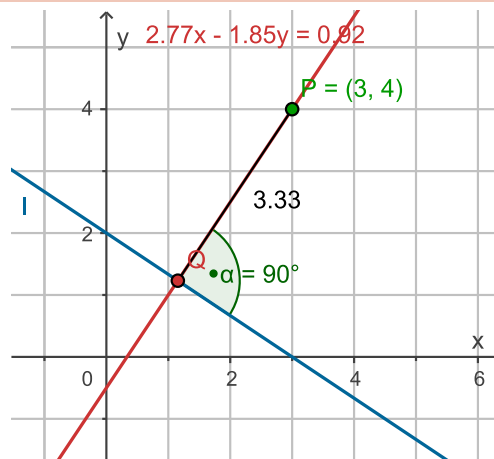
Hier zie je de lijn  $l: 2x + 3y = 6$  en punt  $P(3,4)$ . De afstand van punt  $P$  tot lijn  $l$  geef je aan met  $d(P,l)$  (de 'd' komt van 'distance', Engels voor 'afstand'). Het is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van punt  $P$  en lijn  $l$ . Je ziet dat dit loodrecht op de lijn staat. Dat is ook logisch, want de stelling van Pythagoras zegt dat elk ander verbindingslijnstuk langer is.

Het berekenen van die afstand kun je dus zo doen:

- Stel de vergelijking op van de lijn  $m$  door  $P$  en loodrecht op  $l$ .
- Bereken de coördinaten van punt  $Q$ , het snijpunt van  $m$  en  $l$ .
- Bereken de afstand tussen de punten  $P$  en  $Q$ .

Je ziet in de figuur hoe groot die kortste afstand is als je punt  $Q$  over lijn  $l$  beweegt.

Controleer of je met een berekening op hetzelfde getal uitkomt.



Figuur 1

#### Opgave 1

Gegeven is de lijn  $l: 2x + 3y = 6$  en punt  $P(3,4)$ . Bereken de afstand tussen  $l$  en  $P$ . Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

## Opgave 2

Bereken de afstand van  $P(0,5)$  tot lijn  $m : y = -0,5x + 10$  exact.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

#### Bekijk de applet

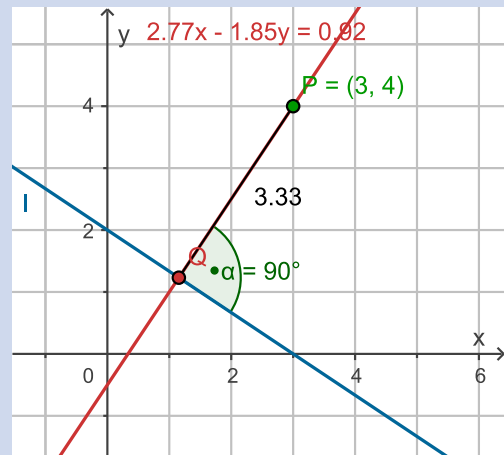
Onder de **afstand** tussen twee objecten wordt altijd de lengte van hun kortste verbindingslijnstuk verstaan. De afstand tussen twee objecten  $V_1$  en  $V_2$  noteer je als  $d(V_1, V_2)$ .

De afstand tussen twee punten  $P(p_1, p_2)$  en  $Q(q_1, q_2)$  is:

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}.$$

De **afstand van een punt tot een lijn** is de lengte van het lijnstuk vanuit het punt en loodrecht op de lijn. De afstand van  $P$  tot  $l$  is  $d(P, l)$  en kun je dus berekenen door:

- de vergelijking op te stellen van de lijn  $m$  door  $P$  en loodrecht  $l$ ;
- de coördinaten van punt  $Q$ , het snijpunt van  $m$  en  $l$ , te berekenen;
- de afstand tussen de punten  $P$  en  $Q$  te berekenen.



Figuur 2

Je kunt met behulp van vergelijkbare methoden de afstand tussen twee lijnen, de afstand van een punt tot een cirkel of een lijn tot een cirkel, e.d., berekenen. Het is soms handig om te gebruiken dat de lijn  $m: bx - ay = d$  loodrecht op  $l: ax + by = c$  staat, waarin  $d$  afhangt van het punt waar  $m$  doorheen moet gaan. Met behulp van richtingscoëfficiënten kun je dat zelf aantonen.

### Voorbeeld 1

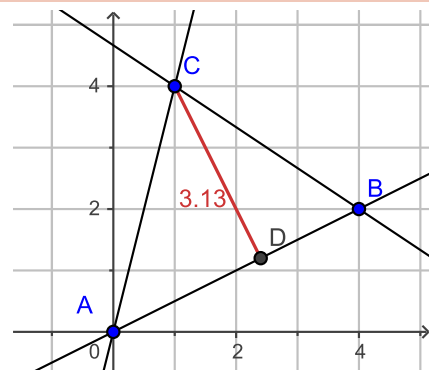
#### Bekijk de applet

Je ziet hier  $\triangle ABC$  met daarin de hoogtelijn  $CD$  getekend. Met 'hoogtelijn' wordt meestal het lijnstuk  $CD$  bedoeld, dus een hoogtelijn heeft een bepaalde lengte. Ga door berekening na of de lengte in de figuur klopt.

Antwoord

De lengte van hoogtelijn  $CD$  is gelijk aan de afstand van  $C$  tot lijn  $AB$ . De afstand van  $C$  tot lijn  $AB$  kun je zo berekenen:

- de vergelijking van  $AB$  is:  $y = \frac{1}{2}x$ ;
- de vergelijking van de lijn  $m$  door  $C$  en loodrecht  $AB$  is:  $y = -2x + 6$ ;
- de coördinaten van het snijpunt van  $m$  en  $AB$  zijn:  $D\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ ;
- de afstand tussen de punten  $C$  en  $D$  is:  $|CD| = \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - 4\right)^2} \approx 3,13$ .



Figuur 3

### Opgave 3

Gegeven is driehoek  $ABC$  met  $A(0,0)$ ,  $B(4,2)$  en  $C(1,4)$ . Bereken de lengte van de hoogtelijnen uit  $A$  en uit  $B$ . Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 4

Oefen met de applet in [Voorbeeld 1](#) het berekenen van lengtes van hoogtelijnen.

### Opgave 5

Bereken de afstand van  $P(25, -13)$  tot de lijn  $l : 5x - 3y = 30$ . Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

### Voorbeeld 2

#### Bekijk de applet

Bekijk in de applet wat je bedoelt met de afstand van een lijn  $l : 2x + 3y = 6$  tot een cirkel met middelpunt  $M(3,4)$  en straal 2. (Beweeg punt  $Q$  over de lijn.) Bereken de afstand van lijn  $l$  tot cirkel  $c$ .

Antwoord

Het gaat om de kortste lengte van lijnstuk  $QS$ . Dat bereik je als lijn  $MQ$  loodrecht op  $l$  staat.

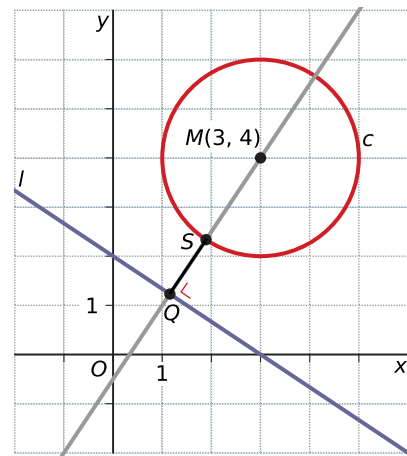
De vergelijking van die lijn  $MQ$  is:  $3x - 2y = 1$ .

(Ga dat na!)

Het punt  $Q$  dat bij de kortste afstand  $|QS|$  hoort is  $(\frac{33}{26}, \frac{15}{13})$ .

Hiermee bereken je de lengte van  $MQ$  en dan vind je de kortste lengte van  $SQ$  door de straal van de cirkel daarvan af te trekken.

Ga na, dat je het juiste antwoord vindt.



Figuur 4

### Opgave 6

Gegeven is de cirkel  $c$  met vergelijking  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 10$  en de lijn  $l : x + y = 2$ .

- Wat versta je onder de afstand van  $O$  tot cirkel  $c$ ? Bereken deze afstand in twee decimalen nauwkeurig.
- Wat versta je onder de afstand van lijn  $l$  tot cirkel  $c$ ? Bereken deze afstand in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken ook de afstand tussen cirkel  $c$  en de cirkel  $k$  om  $O$  en door  $(1,1)$  in twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 7

Bereken de afstand tussen de twee lijnen  $l : 2x + 4y = 7$  en  $m : y = 6 - \frac{1}{2}x$ . Rond af op twee decimalen nauwkeurig. Hint: maak een lijn door  $O$  en loodrecht op de gegeven lijnen.

### Opgave 8

Wanneer heeft het zin om te vragen naar de afstand tussen twee rechte lijnen? Hoeveel bedraagt die afstand in alle andere gevallen?

## Verwerken

### Opgave 9

Bereken de gegeven afstanden. Rond telkens af op twee decimalen nauwkeurig.

- a Punt  $P(2,3)$  tot lijn  $l : 4x - 5y = 40$ .
- b Punt  $P(2,3)$  tot cirkel  $c : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$ .
- c Lijn  $l : 4x - 5y = 40$  tot cirkel  $c : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$ .

### Opgave 10

Toon aan dat de lijnen  $m : y = 4x - 12$  en  $n : y = 4x + 22$  dezelfde afstand hebben tot de lijn  $l : y = 4x + 5$ .

### Opgave 11

Bereken in de volgende gevallen de afstand van cirkel  $c_1$  tot cirkel  $c_2$ . Rond telkens af op twee decimalen nauwkeurig.

- a  $c_1 : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$  en  $c_2$  heeft middelpunt  $M_2(2,1)$  en straal 1.
- b  $c_1 : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$  en  $c_2$  heeft middelpunt  $M_2(2,3)$  en straal 1.
- c  $c_1 : (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$  en  $c_2$  heeft middelpunt  $M_2(2,1)$  en straal 4.

### Opgave 12

Een driehoek  $ABC$  is gegeven door  $A(1,0)$ ,  $B(4,8)$  en  $C(12,2)$ . Geef de vergelijkingen van de hoogtelijnen.

### Opgave 13

Een driehoek  $PQR$  is gegeven door  $P(12,5)$ ,  $Q(35,7)$  en  $R(40,12)$ .

- a Bereken de lengte van de hoogtelijn uit  $P$ . Rond af op twee decimalen.
- b Bereken de oppervlakte van  $\triangle PQR$ .

## Toepassen

### Opgave 14: Hoogte berekenen vanuit oppervlakte

Soms kun je de lengte van een hoogtelijn in een driehoek snel vinden vanuit de oppervlakte. Neem  $\triangle ABC$  met  $A(1,0)$ ,  $B(5,2)$  en  $C(2,6)$ . De afstand van punt  $C$  tot lijn  $AB$  is de lengte van de hoogtelijn  $CD$  in deze driehoek.

- a Bepaal de oppervlakte van  $\triangle ABC$  met behulp van het rooster.
- b Bereken nu de lengte van basis  $AB$  exact.
- c Bereken  $|CD|$  exact, vanuit de formule voor de oppervlakte van een driehoek.

Pas deze techniek toe om de afstand van een punt  $P$  tot een lijn  $l$  te berekenen. Bepaal eerst twee (willekeurige) punten  $A$  en  $B$  op  $l$ . Bereken vervolgens de lengte van de hoogtelijn  $PS$  in  $\triangle PAB$  vanuit de oppervlakte van die driehoek.

- d Bereken op deze manier exact de afstand van  $P(2,10)$  tot de lijn  $l : y = 2x$ .

## Testen

### ■ Opgave 15

Bereken de afstand van  $A(0,12)$  tot de lijn  $l : y = 4x + 5$  in twee decimalen nauwkeurig.


### ■ Opgave 16

Gegeven is de cirkel  $c$  met middelpunt  $O(0,0)$  en straal 7. Bereken de afstand van lijn  $l : -3x + 5y = 68$  tot deze cirkel. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---