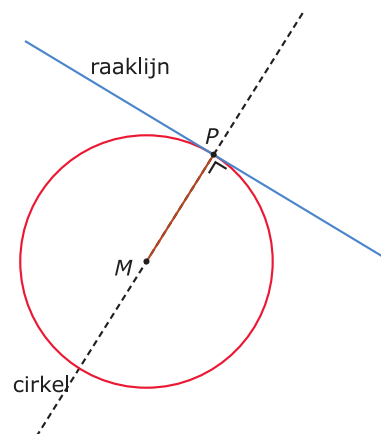


3.3 Raaklijnen

Inleiding

Vergelijkingen opstellen van raaklijnen aan een cirkel kun je al. Maar als je gebruik maakt van de eigenschap die in deze figuur staat uitgebeeld, kun je je daarbij af en toe veel tijd en werk besparen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- gebruik maken van de eigenschap dat een raaklijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt;
- hoeken tussen een lijn en een cirkel en tussen twee cirkels berekenen.

Voorkennis

- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een cirkel opstellen.

Verkennen

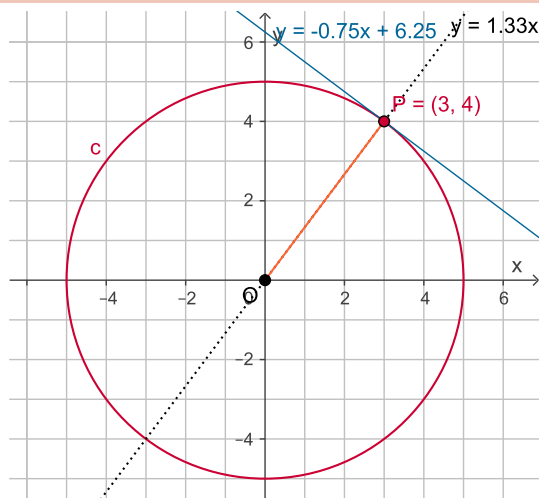
Opgave V1

Bekijk de applet

Hier zie je een cirkel om O met straal 5 en de lijn $l: y = -0,75x + 6,25$.

Lijn l raakt de cirkel in P .

- Wat weet je van de hoek tussen lijnstuk OP en lijn l ? Waarom weet je dat zo zeker?
- Ga na, dat ook $Q(4,3)$ een punt van de cirkel is. Bepaal de richtingscoëfficiënt van lijn OQ . Kun je hiermee de vergelijking van de raaklijn in Q aan de cirkel opstellen?



Figuur 2

Uitleg

Bekijk de applet

In de figuur van **Opgave V1** zie je dat de raaklijn in P aan de cirkel loodrecht staat op de straal OP . Dit is een eigenschap van een raaklijn aan een cirkel.

Met behulp van symmetrie is dat snel duidelijk te maken. De hele figuur van cirkel en raaklijn is namelijk spiegelsymmetrisch t.o.v. de lijn door het middelpunt O van de cirkel en het raakpunt P . Dit betekent dat de twee hoeken bij P waarvan de raaklijn het éne been en de straal OP het andere been is even groot moeten zijn. Maar ze zijn ook samen 180° . Dus zijn ze elk 90° .

Dit kun je gebruiken om een vergelijking op te stellen van een raaklijn als het raakpunt bekend is. De richtingscoëfficiënt a_{straal} van de straal naar het raakpunt kun je immers berekenen vanuit de coördinaten van middelpunt en raakpunt. Dus a_{straal} volgt uit de gegevens.

Omdat raaklijn en straal loodrecht op elkaar staan geldt: $a_{\text{straal}} \cdot a_{\text{raaklijn}} = -1$.

Hiermee bepaal je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, a_{raaklijn} . Omdat de coördinaten van het raakpunt P gegeven zijn kun je nu een vergelijking van de raaklijn opstellen.

Opgave 1

Gegeven is een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en het punt $P(3,4)$. Zie ook de figuur in de **Uitleg**.

- Welke vergelijking heeft cirkel c ?
- Welke richtingscoëfficiënt heeft straal OP ?
- Welke richtingscoëfficiënt heeft de raaklijn in P aan cirkel c ?
- Welke vergelijking heeft die raaklijn?
- Welke vergelijking heeft de raaklijn in $P(5,0)$ aan de cirkel?

Opgave 2

Op de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 10$ ligt het punt $P(3,1)$. Stel een vergelijking op van de raaklijn door P aan cirkel c .

Opgave 3

De lijn $l : x + y = 7$ snijdt de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ in twee punten P en Q .

- Bereken deze punten en stel in beide punten de vergelijking op van de raaklijn aan de cirkel door dat punt.
- Bereken de hoek tussen de twee raaklijnen in gehele graden nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de lijn door het middelpunt van die cirkel en het raakpunt. Daarvan kun je goed gebruik maken bij het opstellen van de vergelijking van een raaklijn aan een cirkel in een punt P op cirkel:

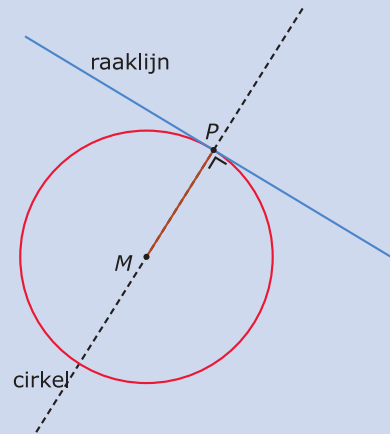
- Eerst bepaal je de richtingscoëfficiënt a_{straal} van lijn MP .
- Omdat straal en raaklijn loodrecht op elkaar staan is

$$a_{\text{straal}} \cdot a_{\text{raaklijn}} = -1.$$

$$\text{Dus: } a_{\text{raaklijn}} = -\frac{1}{a_{\text{straal}}}.$$

- Je weet nu de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en een punt waar hij doorheen gaat (het raakpunt P).

Daarmee stel je de vergelijking van de raaklijn op.



Om snijpunten te berekenen van een lijn en een cirkel gebruik je **Figuur 3** de vergelijking van de lijn en die van de cirkel: je combineert het bijbehorende stelsel vergelijkingen tot één kwadratische vergelijking met één onbekende.

Je kunt deze kwadratische vergelijking schrijven als $ax^2 + bx + c = 0$.

De oplossingen vind je met kwadraat afsplitsen, ontbinden, of de abc-formule.

Als een lijn een cirkel snijdt, kun je je afvragen welke hoek ze in een snijpunt met elkaar maken. Onder de **hoek tussen een rechte lijn en een cirkel** versta je de scherpe hoek die de lijn maakt met de raaklijn aan de cirkel in één van beide snijpunten.

Als twee cirkels elkaar snijden, kun je je afvragen welke hoek ze in een snijpunt met elkaar maken. Onder de **hoek tussen twee cirkels** versta je de scherpe hoek die de raaklijnen aan de cirkels in één van beide snijpunten met elkaar maken.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De lijn $l: y = 3$ snijdt de cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$. Bereken de hoek die l en c met elkaar maken.

Antwoord

Eerst bereken je beide snijpunten: Substitueer hiertoe $y = 3$ in de cirkelvergelijking $x^2 + y^2 = 25$. Dan vind je $x^2 + 3^2 = 25$. Uitwerken geeft $x = \pm 4$ en dus zijn de snijpunten $A(-4, 3)$ en $B(4, 3)$. De cirkel heeft middelpunt $O(0, 0)$.

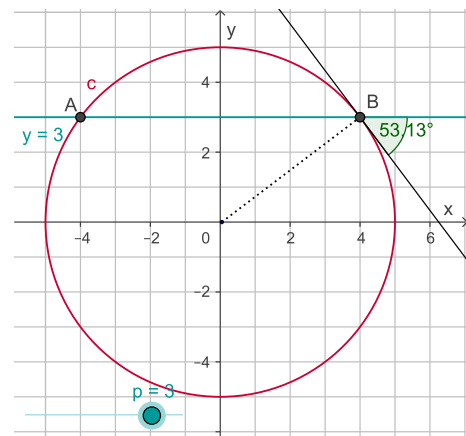
Nu ga je de vergelijking van de raaklijn opstellen in (bijvoorbeeld) B .

Omdat OB een richtingscoëfficiënt van $\frac{3}{4}$ heeft, is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $-\frac{4}{3}$.

Deze raaklijn maakt dus een richtingshoek α met de x -as met $\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$.

De richtingshoek is $\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13^\circ$.

De lijn $y = 0$ heeft een richtingscoëfficiënt van 0 en een richtingshoek van 0° . De hoek tussen beide lijnen is $53,13^\circ$. Dit is tevens de hoek tussen de lijn en de cirkel.



Figuur 4

Opgave 4

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$, de lijn $l : y = 3$ en de snijpunten $A(-4,3)$ en $B(4,3)$ van l met c . Zie **Voorbeeld 1**.

- Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt B aan de cirkel.
- Bereken de hoek tussen de cirkel c lijn l .
- Waarom heb je bij de berekening de vergelijking van de cirkel niet nodig?
- Laat zien dat de hoek tussen l en c in het punt $A(-4,3)$ hetzelfde is.

Opgave 5

Gegeven de cirkel $c : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

- Bereken de snijpunten van c met de coördinaatassen.
- Stel de vergelijkingen op van de raaklijnen aan de cirkel c in de snijpunten met de assen.
- Bereken de hoek waaronder c de x -as snijdt in graden nauwkeurig.
- Bereken de hoek waaronder c de y -as snijdt in graden nauwkeurig.

Opgave 6

De lijn l met vergelijking $y = x$ en de cirkel c middelpunt $M(3,0)$ en door het punt $P(4,2)$ snijden elkaar in A en B . Bereken de hoek waaronder l en c elkaar snijden in graden nauwkeurig. Rond af op één decimaal achter de komma.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

De twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 5$ en $c_2 : x^2 + y^2 = 6x - 1$ snijden elkaar in de punten A en B . Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Antwoord

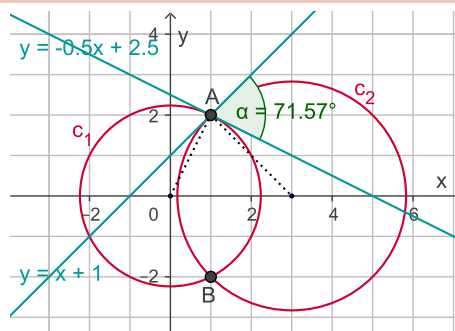
Eerst bereken je de snijpunten $A(1,2)$ en $B(1,-2)$.

Dan stel je de raaklijn aan c_1 en die aan c_2 op in één van die punten, zeg A .

- Het middelpunt van c_1 is $O(0,0)$ en OA heeft als richtingscoëfficiënt 2. Dus $a_s = 2$. De raaklijn aan c_1 in A heeft als richtingscoëfficiënt $-0,5$. Deze raaklijn maakt een hoek van $\arctan(-0,5) \approx -26,6^\circ$ met de x -as.
- Herleid c_2 naar $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ met behulp van kwadraatplitsen. Het middelpunt van c_2 is $M(3,0)$ en MA heeft als richtingscoëfficiënt -1 . De raaklijn aan c_2 in A heeft als richtingscoëfficiënt 1. Deze raaklijn maakt een hoek van $\arctan(1) = 45^\circ$ met de x -as.

De hoek tussen deze raaklijnen is $45^\circ - 26,6^\circ \approx 18,4^\circ$.

De hoek tussen de raaklijnen is hetzelfde als de hoek tussen beide stralen naar het raakpunt. De berekening had daarom wel korter gekund.



Figuur 5

Opgave 7

De twee cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 10$ en $c_2 : x^2 + y^2 = 8y - 14$ snijden elkaar in de punten A en B . Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Opgave 8

De cirkel c_1 met middelpunt $M_1(1,2)$ en straal $\sqrt{5}$ en de cirkel c_2 met middelpunt $M_2(0,2)$ en straal $\sqrt{2}$ snijden elkaar in de punten P en Q . Bereken de hoek waaronder ze elkaar snijden.

Verwerken

Opgave 9

De lijn $l : y = 2$ snijdt de cirkel $c : x^2 + y^2 = 16$.
Bereken de hoek die l en c met elkaar maken.

Opgave 10

Gegeven de cirkel $c : (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 10$.

- Bereken de hoek waaronder c de y -as snijdt in graden nauwkeurig.
- Bereken de hoek waaronder c de lijn $y = x$ snijdt in graden op één decimaal nauwkeurig.

Opgave 11

Bereken de hoek waaronder een cirkel met straal $\sqrt{13}$ en middelpunt $(2,4)$ een andere cirkel met middelpunt $(-2,0)$ en straal $\sqrt{5}$ snijdt, in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

Lijn m raakt de cirkel $c : x^2 + y^2 = 6,25$ in het punt $A(-2; 1,5)$. De punten $B(2,5; 0)$ en $C(1,5; -2)$ liggen op cirkel c . Toon aan dat de hoek tussen m en lijn AB even groot is als $\angle C$ van $\triangle ABC$.

Opgave 13

Het punt $Q(1,4)$ ligt buiten de cirkel $c : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Er zijn twee raaklijnen te tekenen vanuit Q aan cirkel c . De bijbehorende raakpunten zijn A en B .

- M is het middelpunt van c . Bereken $|QM|$.
- De lengtes van de stralen MA en MB zijn bekend. Bereken $|QA|$ en $|QB|$.
- De punten A en B liggen op een cirkel met middelpunt Q en straal $|QA|$. Stel een vergelijking van die cirkel c_2 op.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten A en B van c en c_2 .
- Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen aan c die door Q gaan.

Opgave 14

Een cirkel snijdt de x -as onder een hoek van 45° in de punten $(1,0)$ en $(5,0)$.
Bereken het middelpunt en de straal van deze cirkel als het middelpunt boven de x -as ligt.

Toepassen

Opgave 15: Ingeschreven cirkel (1)

De driehoek ABC heeft hoekpunten $A(-2,0)$, $B(2,0)$ en $C(0,2\sqrt{3})$.

- Toon aan dat driehoek ABC gelijkzijdig is.
- De ingeschreven cirkel van deze driehoek is de cirkel die alle drie de zijden raakt. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Opgave 16: Ingeschreven cirkel (2)

De punten $A(-2,0)$, $B(0,-4)$, $C(2,0)$ en $D(0,4)$ zijn hoekpunten van een ruit $ABCD$. De ingeschreven cirkel van deze ruit is de cirkel die alle vier de zijden raakt. Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Testen**Opgave 17**

Gegeven is de cirkel $c : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

- a** Toon aan dat deze cirkel door $O(0,0)$ gaat en stel een vergelijking op van de raaklijn aan c in dit punt.
- b** Bereken de hoek waaronder c de x -as snijdt. Rond af op één decimaal.
- c** Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt 1,5 die deze cirkel raken. Welke twee lijnen zijn dat?

Opgave 18

Een cirkel raakt de lijn $l : y = 0,5x$ in het punt $P(4,2)$. Het middelpunt van deze cirkel ligt op de lijn $m : y = 2x + 2$. Onder welke hoek snijdt deze cirkel de y -as? Rond af op één decimaal.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
