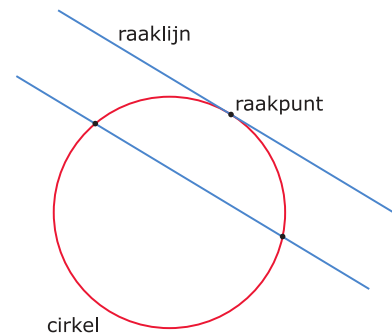


3.2 Snijden en raken

Inleiding

Een cirkel en een lijn kunnen gemeenschappelijke punten hebben. Dergelijke snijpunten heb je leren uitrekenen. Als cirkel en lijn precies één gemeenschappelijk punt hebben, dan spreek je van 'raken': de lijn en de cirkel raken elkaar. Je noemt zo'n lijn een raaklijn aan de cirkel en het gemeenschappelijke punt heet het raakpunt.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- nagaan of een lijn een cirkel snijdt, mist of raakt;
- hoe je de vergelijking kunt opstellen van een lijn die een cirkel raakt;
- de coördinaten van het raakpunt van een lijn en een cirkel berekenen;
- de vergelijking van een cirkel opstellen die aan een gegeven lijn raakt.

Voorkennis

- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen;
- de abc -formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met de discriminant bij een kwadratische vergelijking.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Teken een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 5. Gegeven is verder de lijn $l: y = -0,75x + b$. De waarde van b kan variëren. A en B zijn de snijpunten van deze lijn met de cirkel.

- Neem $b = 0$ en bereken de coördinaten van A en B .
- Voor welke waarden van b vallen dan A en B samen? (Gebruik je figuur.)

Uitleg

Bekijk de applet

Als er een cirkel c met straal 5 en middelpunt O en de lijn $l: y = -0,75x + 2$ gegeven zijn, dan bereken je hun snijpunten door in $x^2 + y^2 = 25$ voor y de uitdrukking $-0,75x + 2$ in te vullen (te substitueren).

Je vindt dan: $x^2 + (-0,75x + 2)^2 = 25$.

Deze vergelijking schrijf je als $\frac{9}{16}x^2 - 3x - 21 = 0$.

Zo'n vergelijking los je op met de abc -formule. Je vindt twee oplossingen voor x omdat de discriminant positief is. Je vindt dan $x = -2,83$ en $x = 4,75$. En de snijpunten die je zoekt worden dan $(-2,83; 4,12)$ en $(4,75; -1,56)$.

Wil je de snijpunten van $m: y = -0,75x + 6,25$ en cirkel c berekenen, dan gebeurt er iets bijzonders. Na invullen vind je $x^2 + (-0,75x + 6,25)^2 = 25$.

Dit kun je herleiden tot $1\frac{9}{16}x^2 - 9\frac{3}{8}x + 14\frac{1}{16} = 0$.

Als je dit op dezelfde manier gaat oplossen dan zijn er geen twee x -waarden, maar slechts één. Dat komt omdat hier de discriminant 0 is. Er is blijkbaar maar één oplossing en de twee snijpunten vallen dan als het ware samen, de lijn m en de cirkel c raken elkaar. Lijn m heet een raaklijn aan cirkel c . Er is één raakpunt.

Wanneer de discriminant kleiner dan 0 is bestaan er geen reële oplossingen: dat betekent dat de lijn en de cirkel elkaar missen.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de cirkel c en de lijn $l: y = -0,75x + 2$.

- Bereken zelf de snijpunten van l en c in twee decimalen nauwkeurig.
- Toon aan dat $m: y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$ raakt aan de cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$.
- Bereken het raakpunt.
- Er is nog een lijn met dezelfde richtingscoëfficiënt die aan cirkel c raakt. Welke vergelijking heeft die lijn?

Opgave 2

Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 5$. Welke van deze lijnen raakt cirkel c ? Bereken telkens de snijpunten of het raakpunt van lijn en cirkel.

- $y = 2x$
- $y = 2x + 2,5$
- $y = -0,5x + 2,5$
- $y = -0,5x - 2,5$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een lijn en een cirkel hebben geen, één of twee punten gemeenschappelijk. Hebben een lijn en een cirkel twee punten gemeen, dan snijden ze elkaar.

Hebben een lijn en een cirkel maar één punt gemeen (beide snijpunten vallen dan samen), dan zeg je dat ze elkaar **raken**. De lijn is een **raaklijn** aan de cirkel.

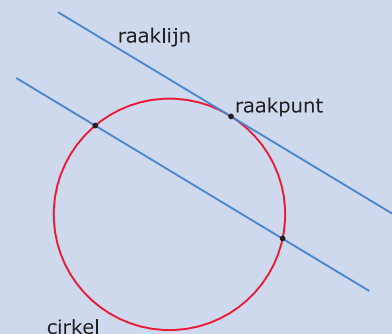
Om snijpunten te berekenen van een lijn en een cirkel gebruik je de vergelijking van de lijn en die van de cirkel: je combineert het bijbehorende stelsel vergelijkingen tot één kwadratische vergelijking met één onbekende.

Je kunt deze kwadratische vergelijking schrijven als $ax^2 + bx + c = 0$.

De oplossingen hiervan bereken je door ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen, of de abc-formule.

Als de lijn en de cirkel elkaar raken dan heeft deze kwadratische vergelijking met één onbekende maar één oplossing.

De **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ van deze vergelijking is dan 0. Daarvan kun je gebruik maken bij het opstellen van vergelijkingen van raaklijnen.



Figuur 2

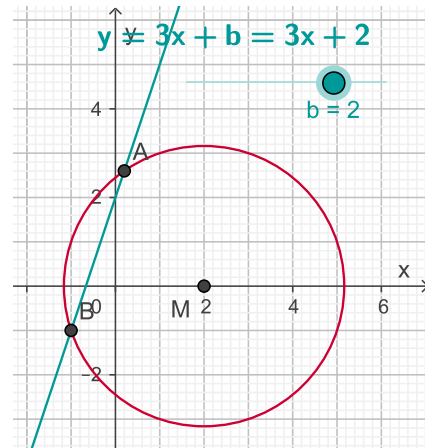
Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(2,0)$ en straal $\sqrt{10}$.
Van de familie van lijnen $l : y = 3x + b$ raken er twee aan deze cirkel. Welke twee?

Antwoord

De cirkel c heeft vergelijking: $(x - 2)^2 + y^2 = 10$.
Vul de vergelijking van lijn l : $y = 3x + b$ in de cirkelvergelijking c in, en je vindt: $(x - 2)^2 + (3x + b)^2 = 10$. Haakjes wegwerken levert op: $10x^2 - 4x + 6bx + 4 + b^2 = 10$. En dus: $10x^2 + (6b - 4)x + b^2 - 6 = 0$.



Figuur 3

Opgave 3

Er zijn twee lijnen van vorm $m : y = \frac{1}{3}x + b$ die aan cirkel $c : (x - 2)^2 + y^2 = 10$ raken. Stel van deze twee lijnen de vergelijkingen op.

Opgave 4

Stel vergelijkingen op van de raaklijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ die raken aan de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 3)^2 = 20$.

Opgave 5

Gegeven is de lijn k met vergelijking $x + 2y = 6$. Er is een cirkel met middelpunt O die deze lijn raakt. Stel van deze cirkel een vergelijking op.

Voorbeeld 2**Bekijk de applet**

Het punt $P(0, -2)$ ligt buiten cirkel c : $(x - 4)^2 + y^2 = 10$.

Er zijn twee lijnen door P te tekenen die de cirkel c raken.

Stel van die twee raaklijnen de vergelijkingen op.

Antwoord

Je stelt eerst de vergelijking op van een lijn met richtingscoëfficiënt a die door het punt P gaat: $y = ax + b$ door $P(0, -2)$ geeft $y = ax - 2$.

De lijn $y = ax - 2$ substitueer je dan weer in de gegeven cirkelvergelijking. Dit geeft:

$$(x - 4)^2 + (ax - 2)^2 = 10.$$

Uitwerken geeft $x^2 - 8x + 16 + a^2x^2 - 4ax + 4 = 10$ en dit werk je uit tot:

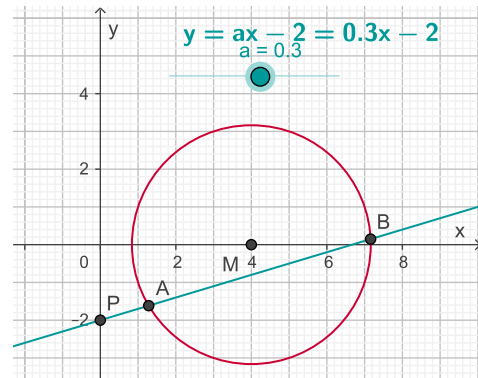
$$(1 + a^2)x^2 + (-4a - 8)x + 10 = 0.$$

Bij raken moet voor de discriminant D gelden: $D = 0$.

$$\text{Dus: } (-4a - 8)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 10 = 0.$$

Hieruit volgt: $a = 3 \vee a = -\frac{1}{3}$.

De gevraagde vergelijkingen zijn: $y = 3x - 2$ en $y = -\frac{1}{3}x - 2$.



Figuur 4

Opgave 6

De lijnen die door het punt $P(0,5)$ gaan hebben een vergelijking van de vorm $y = ax + 5$. Twee van die lijnen raken de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 10$. Welke twee lijnen zijn dat?

Opgave 7

Het punt $Q(0,2)$ ligt buiten de cirkel c : $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen aan de cirkel c die door Q gaan.

Opgave 8

Gegeven het punt $R(0,4)$ en de cirkel c : $(x - 3)^2 + y^2 = 25$. Stel de vergelijkingen op van alle lijnen die door R gaan en de cirkel c raken.

Opgave 9

Hoeveel lijnen door $A(0,2)$ raken de cirkel met middelpunt $M(1,2)$ en straal 3?

Verwerken**Opgave 10**

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 16$ en de lijn l : $y = x + b$.

- Neem $b = 1$ en onderzoek of deze lijn de cirkel snijdt, raakt of mist.
- Voor welke waarde(n) van b raakt l aan c ?
- Voor welke waarden van b snijdt l de cirkel c ? En voor welke waarden van b mist l de cirkel c ?

Opgave 11

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$. Hieronder staan wat omschrijvingen van lijnen l . Stel telkens vergelijkingen op van alle lijnen l die aan deze omschrijving voldoen.

- a l heeft een richtingscoëfficiënt van 1 en raakt cirkel c .
- b l gaat door $P(0,10)$ en raakt c .
- c l gaat door $S(0, -10)$ en raakt c .

Opgave 12

Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(1,2)$ die de lijn l met vergelijking $x - 2y = 6$ raakt.

Opgave 13

Er is een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ die de lijn met vergelijking $l : y = 6 - x$ raakt. Stel van deze cirkel een vergelijking op en bereken de coördinaten van het raakpunt.

Opgave 14

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$. Lijn l staat loodrecht op lijn $m : y = \frac{3}{4}x$ én raakt cirkel c . Stel de vergelijking op van lijn l . Hoeveel mogelijkheden zijn er?

Toepassen**Opgave 15: Afstand tussen twee raakpunten**

Vanuit $O(0,0)$ kun je twee raaklijnen tekenen aan de cirkel c met middelpunt $(25,0)$ en diameter 10. Deze raaklijnen raken de cirkel in de punten A en B . Bereken de lengte van AB door de vergelijkingen van beide raaklijnen op te stellen. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 16: Snijpunt van raaklijnen

De cirkel c heeft middelpunt $O(0,0)$ en straal 1. De verticale lijn $l : x = a$ snijdt deze cirkel als $-1 < a < 1$ in twee punten A en B . De raaklijnen in die twee punten aan de cirkel snijden elkaar in het punt C .

- a Neem $a = \frac{1}{2}$ en toon aan, dat $C = (2,0)$.
- b Toon aan dat voor elke $a \neq 0$ geldt: $C = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$.

Testen**Opgave 17**

Gegeven is de cirkel $c : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 17$. Hieronder staan wat omschrijvingen van lijnen l . Stel telkens vergelijkingen op van alle lijnen l die aan deze omschrijving voldoen.

- a l heeft een richtingscoëfficiënt van 4 en raakt cirkel c .
- b l gaat door $P(-1,2)$ en raakt cirkel c .

Opgave 18

Stel een vergelijking op van de cirkel met straal 10 en middelpunt op de x -as die de lijn met vergelijking $6x + 4y = 40$ raakt. Rond hierbij af op twee decimalen.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
