

3.1 Middelpunten

Inleiding

Van dit bord van Delft's Blauw zijn vier scherven overgebleven. Je kunt zien dat het een rond bord was. Maar hoe reconstrueer je nu het ronde bord? In dit onderwerp zul je zien hoe je een cirkel kunt maken vanuit drie gegeven punten.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- door kwadraat afsplitsen de vergelijking van een cirkel zo schrijven dat middelpunt en straal eruit zijn af te lezen;
- het middelpunt van een cirkel construeren als er drie punten van zijn gegeven;
- een vergelijking opstellen van een cirkel door drie gegeven punten.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van lijnen en cirkels in een rechthoekig assenstelsel;
- snijpunten van lijnen en cirkels berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk het bord in de [Inleiding](#).

Van dit bord van Delft's Blauw zijn vier scherven overgebleven. Je kunt zien dat het een rond bord was.

Formuleer een manier om de cirkel die het bord beschreef te reconstrueren.

Uitleg 1

Bekijk de applet

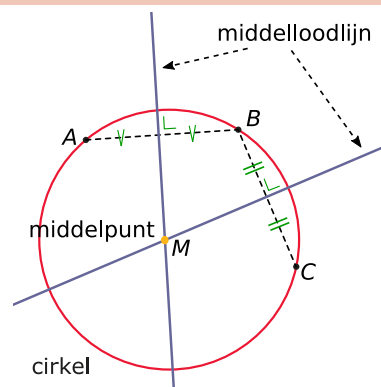
Wil je een cirkel tekenen met je passer, dan moet je weten welk punt het middelpunt is en hoe groot de straal is. Hoe vind je die als je alleen een paar punten A , B , C hebt die op de cirkel liggen?

Noem het middelpunt van de cirkel die je wilt tekenen even M . Bedenk dan dat M even ver van alle punten op de cirkelboog ligt. Noem nu twee punten A en B die op de cirkelboog liggen, dan ligt M ergens op de middelloodlijn van AB . Want alle punten op deze middelloodlijn liggen even ver van A als van B .

Ga na, dat dit ook opgaat als je A en B verplaatst. Gebruik hiervoor de applet.

Met drie punten A , B , C zijn er drie middelloodlijnen te maken die allemaal door het middelpunt van de cirkel gaan. Het middelpunt van de cirkel is dus het snijpunt van twee middelloodlijnen.

In de figuur zie je de middelloodlijn van AB en die van BC getekend. M is het snijpunt van beide middelloodlijnen. M ligt ook op de middelloodlijn van AC .



Figuur 2

In GeoGebra kun je dit gemakkelijk zelf construeren. Het programma geeft dan de vergelijking van de bijbehorende cirkel. Maar soms heeft die een vorm als $x^2 + y^2 + 6x = 0$. Hoe weet je dan het middelpunt van de cirkel? GeoGebra kan dit snel omzetten, maar hoe doe je dit handmatig?

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je een cirkel construeert door drie gegeven punten.

- Teken drie punten A , B , en C (niet op één lijn). Op welke lijnen ligt het middelpunt van de cirkel door die drie punten?
- Construeer nu een cirkel door deze drie punten.
- Verklaar waarom de drie middelloodlijnen door één punt, M gaan en dat dit punt tevens het middelpunt van de cirkel is.

Opgave 2

Hier zie je een driehoekig grasveld. In tijden van droogte sproei je water over het gras. Je hebt een vaste sproeier die een cirkelvormig gebied kan besproeien. Waar plaats je de sproeier en hoe groot moet de straal van het gebied dat hij kan bestrijken minstens zijn?



Figuur 3

Opgave 3

Er zijn computerprogramma's die bij (een deel) van een geconstrueerde kromme lijn een vergelijking kunnen geven. Stel je vindt $x^2 + y^2 + 6x = 0$. Is dit dan een vergelijking van een cirkel? Licht je antwoord toe.

Uitleg 2

Als je een vergelijking zoals $x^2 + y^2 + 6x = 0$ bij een kromme lijn ziet staan, hoe weet je dan zeker of de kromme een cirkel is? De grafiek mag dan wel op een cirkel lijken, maar is dat ook echt zo?

Vergelijkingen van cirkels hebben altijd de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ waarin het middelpunt $M(a, b)$ en de straal r is. Om uit te zoeken of $x^2 + y^2 + 6x = 0$ een cirkel voorstelt moet je deze vergelijking in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ kunnen schrijven.

De term y^2 is gemakkelijk om te schrijven: $(y - 0)^2$. Dus $b = 0$.

Maar het omschrijven van $x^2 + 6x$ gaat met kwadraat afsplitsen. Je ziet nog eens in de figuur dat $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$. Merk op dat je de term $6x$ moet lezen als $2 \cdot 3x$.

Dus: $x^2 + y^2 + 6x = 0$ kun je nu als volgt herleiden:

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 0)^2 = 0 \text{ en dit wordt}$$

$$(x + 3)^2 + (y - 0)^2 = 9.$$

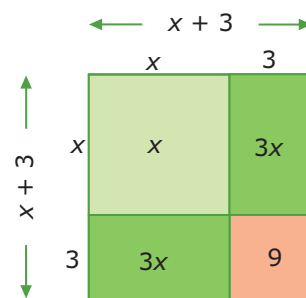
Vergelijk dit met de algemene vorm van een cirkel namelijk

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Dan zie je dat geldt $a = -3$ en $b = 0$ en dat $r^2 = 9$ dus $r = 3$.

De gegeven vergelijking is dus van een cirkel met middelpunt $M(-3, 0)$ en straal 3.

De vergelijking van de cirkel is $(x + 3)^2 + y^2 = 9$.



Figuur 4

Opgave 4

Bekijk in **Uitleg 2** hoe kwadraat afsplitsen gaat.

Splits een kwadraat af van de volgende uitdrukkingen:

- $x^2 + 8x$

- b** $x^2 + 12x$
- c** $x^2 + 5x$
- d** $x^2 - 6x$
- e** $x^2 - 8x$
- f** $x^2 - x$

Opgave 5

Ga na of de volgende vergelijkingen bij cirkels horen.

Bepaal, als het cirkels zijn, het middelpunt en de straal van die cirkel.

- a** $x^2 + y^2 + 8x + 4y = 0$
- b** $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 25$
- c** $2x^2 + y^2 + 8x = x^2 + 4y$

Opgave 6

Niet elke vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ is de vergelijking van een cirkel. Neem bijvoorbeeld $x^2 + y^2 - 8x + 4y = -25$. Laat met behulp van kwadraat afsplitsen zien, dat hier van een cirkel geen sprake is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: cirkel door drie punten

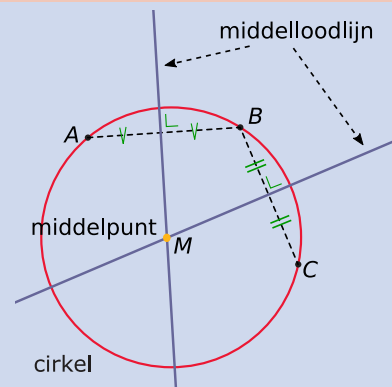
Heb je drie punten A , B en C die niet op één lijn liggen, dan kun je daar altijd een cirkel door tekenen. Door twee van de drie bijbehorende **middelloodlijnen** met elkaar te snijden bepaal je het middelpunt M van die cirkel. De afstanden $|MA| = |MB| = |MC|$ zijn stralen van de cirkel.

Bij een gegeven kwadratische vergelijking kun je niet altijd onmiddellijk zien of het een cirkel betreft of niet.

Elke cirkelvergelijking kan altijd in de vorm $(x - a)^2 + (y - c)^2 = r^2$ worden gezet, waarin het middelpunt $M(a, b)$ en de straal r is.

Heb je een vergelijking waarin naast $x^2 + y^2$ ook nog termen van de vorm $2ax$ en $2by$ voorkomen, dan gebruik je het **kwadraat afsplitsen** om de vergelijking in de voorgaande vorm te brengen.

Je gebruikt daarbij $x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$ en $y^2 + 2by = (y + b)^2 - b^2$.



Figuur 5

Voorbeeld 1**Bekijk de applet**

Gegeven zijn de punten $A(0,3)$, $B(2,6)$ en $C(5,4)$. Stel een vergelijking op van de cirkel c door deze drie punten.

(Door de punten te verplaatsen kun je meer situaties oefenen.)

Antwoord

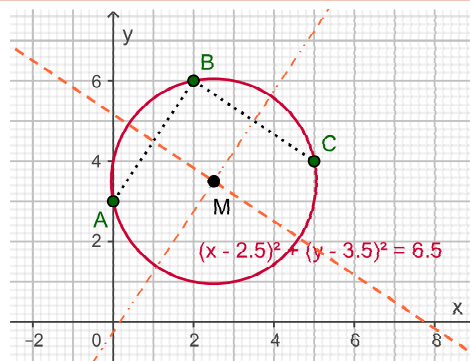
Stel eerst vergelijkingen op van de middelloodlijnen van (bijvoorbeeld) AB en BC .

- De middelloodlijn van AB heeft een richtingscoëfficiënt van $-\frac{2}{3}$ en gaat door $(1;4,5)$. De vergelijking ervan is $y = -\frac{2}{3}x + 5\frac{1}{6}$.

- De middelloodlijn van BC heeft een richtingscoëfficiënt van 1,5 en gaat door $(3,5; 5)$. De vergelijking ervan is $y = 1,5x - 0,25$.

Het snijpunt van beide middelloodlijnen is $M(2,5; 3,5)$ en dit is het middelpunt van de bedoelde cirkel. Deze heeft daarom als vergelijking $(x - 2,5)^2 + (y - 3,5)^2 = r^2$. De juiste waarde van r^2 vind je door een punt van de cirkel (bijvoorbeeld $A(0,3)$) in te vullen voor x en y .

Je vindt dan: $r^2 = (0 - 2,5)^2 + (3 - 3,5)^2 = 6,5$. De straal van de cirkel is dan $\sqrt{6,5} \approx 2,55$. De uiteindelijke vergelijking van de cirkel wordt dan $(x - 2,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 6,5$.



Figuur 6

Opgave 7

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking opstelt van de cirkel door de punten $A(0,3)$, $B(2,6)$ en $C(5,4)$. Voer de berekeningen in dit voorbeeld zelf uit. In de applet kun je de punten A , B en C verplaatsen en zo in nieuwe situaties het opstellen van de vergelijking van de cirkel oefenen. Doe dit zo vaak als nodig. Het uiteindelijke antwoord vind je in de applet.

Opgave 8

Neem in een cartesisch assenstelsel de punten $O(0,0)$, $A(4,0)$ en $B(3,5)$.

- Stel vergelijkingen op van de middelloodlijnen van OA , AB en OB .
- Laat met berekeningen zien dat die middelloodlijnen door één punt gaan.
- Teken een cirkel door die drie punten en stel er een vergelijking van op.
- Laat met berekeningen zien dat zowel O als A en B ook echt op de cirkel liggen.

Voorbeeld 2

Bij een kromme k_1 staat de vergelijking $y^2 = 5x - x^2 + 8y$.

Bij een kromme k_2 staat de vergelijking $x^2 + y^2 + 6y + 13 = 0$.

Zijn beide krommen cirkels?

Antwoord

Door herleiden en kwadraat afsplitsen vind je:

- $k_1 : (x - 2,5)^2 + (y - 4)^2 = 22,25$
- $k_2 : (x - 0)^2 + (y + 3)^2 = -4$

Je ziet dat k_1 een cirkel is met middelpunt $(2,5; 4)$ en straal $\sqrt{22,25}$. Maar k_2 is geen cirkel, want als de straal r is moet $r^2 = -4$ en dat kan niet.

Opgave 9

Bereken (indien mogelijk) de straal en de coördinaten van het middelpunt van deze cirkels.

- a $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 5$
- b $x^2 + y^2 = 6x - 4y - 50$
- c $x(x + 4) = 3 - y(y + 2)$
- d $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y = 0$
- e $5 - x^2 - y^2 = 4x + 2y$
- f $x^2 + y^2 = 4x + 2y - 5$

Opgave 10

Stel een vergelijking op van de cirkel die door de volgende punten gaat:

- a $A(-2,3)$, $B(4,3)$ en $C(2,4)$.
- b $A(-4,6)$, $B(8,6)$ en $C(4,8)$

Verwerken**Opgave 11**

Stel bij de volgende gegevens de vergelijking(en) van de cirkel(s) c op.

- a c gaat door de punten $P(20,5)$, $Q(28,9)$ en $R(25,15)$.
- b c heeft middelpunt $(-5,10)$ en gaat door $O(0,0)$.

Opgave 12

Je ziet hier allerlei kwadratische vergelijkingen. Een kwadratische vergelijking stelt vaak een kromme lijn in het platte vlak voor. Onderzoek in welke gevallen het om een cirkel gaat en bereken dan het middelpunt en de straal. Bereken in alle gevallen de snijpunten met de x -as.

- a $x^2 + y^2 = 3x$
- b $x^2 - y^2 = 3x$
- c $x^2 - y = 3x$
- d $x^2 + y^2 + 2xy = 16$
- e $x(x - 4) = y(6 - y)$
- f $(x - y)^2 = 2x(6 - y)$

Opgave 13

Bereken de straal van de cirkel die door de hoekpunten van een gelijkbenige driehoek met zijden van 12, 10 en 10 cm gaat.

Opgave 14

Onderzoek of de volgende vier punten op een cirkel liggen: $A(0,0)$, $B(9,12)$, $C(25,0)$ en $D(12,-13)$.

Opgave 15

Gegeven zijn de vergelijkingen $c_1 : x^2 + y^2 - 4y = 0$ en $c_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$.

Probeer je van c_1 en c_2 de snijpunten uit te rekenen, dan merk je dat ze geen gemeenschappelijke punten hebben. Welke van beide cirkels ligt geheel binnen de andere?

Opgave 16

Een cirkel c gaat door de punten $A(2,5; 5)$ en $B(5,5; 1)$ en heeft $r = 5$ als straal.

Stel op algebraïsche wijze de vergelijking op van cirkel c .

Opgave 17

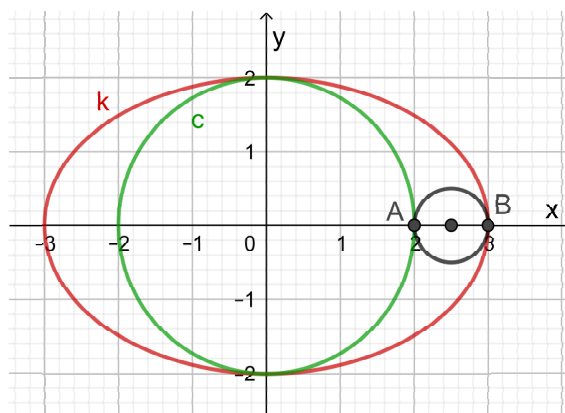
Gegeven is de cirkel $c : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

- Stel een vergelijking op van de middelloodlijn m van lijnstuk OM waarin M het middelpunt van c is.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de lengte van het lijnstuk PQ als P en Q de snijpunten van m met cirkel c zijn.
- Toon aan dat vierhoek $MQOP$ (of $MPOQ$, afhankelijk van wat je P en wat je Q hebt genoemd) een ruit is.

Toepassen**Opgave 18: Ellips**

De kromme k met vergelijking $4x^2 + 9y^2 = 36$ is geen cirkel, maar een ellips (een 'afgeplatte' cirkel). Cirkel c is de grootste cirkel die nog precies in de ellips past. B is het snijpunt van k met de x -as dat een positieve x -coördinaat heeft. A is het snijpunt van c met de x -as dat een positieve x -coördinaat heeft. Door A en B gaat een cirkel c_2 met middelpunt op de x -as. Iemand beweert dat deze cirkel geheel binnen de ellips k ligt. Of dit waar is mag je niet zomaar uit de figuur (gemaakt met GeoGebra) afleiden.

- Bereken van deze ellips de snijpunten met de assen.
- Stel een vergelijking op van de cirkel c_2 .
- Onderzoek door berekening of c_2 binnen k ligt.



Figuur 7

Testen**Opgave 19**

Stel bij de volgende gegevens de vergelijking van de cirkel c op.

- c gaat door de punten $P(0,4)$, $Q(8,0)$ en $R(5,9)$.
- Het middelpunt van c ligt op de x -as en c snijdt de lijn l in de punten $A(6,6)$ en $B(10,-2)$.

Opgave 20

Gegeven is de cirkel $c : x^2 + 4x = 5y - y^2$.

Laat zien dat het middelpunt van cirkel c ligt op de lijn $l : 2x + 2y = 1$.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het berekenen van het middelpunt en de straal van een gegeven cirkel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier. Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
