

2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Vectoren en goniometrie** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- vector, lengte en richtingshoek — componenten van een vector
- sinus, cosinus, tangens ook van hoeken groter dan 90°
- de sinusregel
- de cosinusregel

Activiteitenlijst

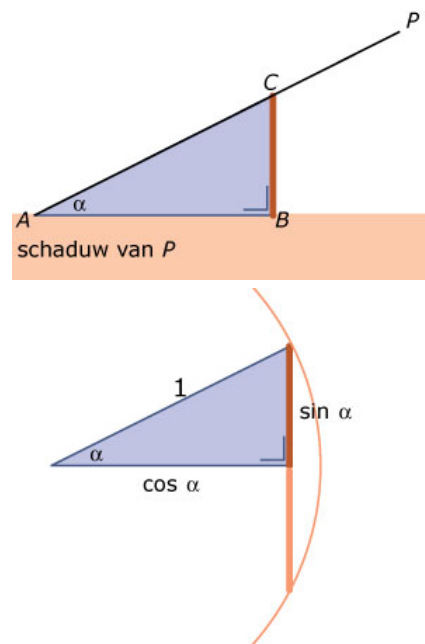
- componenten van een vector bepalen door meting/berekening — positieve/negatieve componenten onderscheiden
- componenten van vectoren berekenen met behulp van sin en cos — sin, cos en tan van hoeken (ook) boven 90° bepalen
- de sinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken
- de cosinusregel gebruiken in (niet-)rechthoekige driehoeken

Achtergronden

Met een staaf van een bepaalde lengte werden in de oude culturen de posities van de zon, de maan en andere hemellichamen vastgelegd. Bij elk punt aan de hemel hoort een bepaalde 'schaduw' en een bepaalde hoek. Er is dus een verband tussen hoek A en punt P aan de hemel. Goniometrie (hoekmeting) speelt daarom van oudsher een grote rol in de sterrenkunde.

De beroemde Alexandrijnse astronoom **Ptolemaeus** gaf rond 150 na Chr. in zijn boek 'Almagest' een tabel de lengtes van de koorden bij bepaalde cirkelhoeken. De Indiërs gaven in de 7de eeuw bij een gegeven middelpuntshoek de lengte van de halve koorde. Via het Arabisch is het woord voor 'halve koorde' in de 12de eeuw in het Latijn vertaald als *sinus* (wat 'bocht' of 'boezem' betekende).

Het woord *cosinus* is de afkorting voor 'complementi sinus' (de sinus van het complement). Met 'complement' wordt de hoek bedoeld die de gegeven hoek aanvult tot 90° .



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn vectoren met lengte v en richtingshoek α . Bereken de x-component en de y-component. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

- a $v = 20$ en $\alpha = 45^\circ$
- b $v = 20$ en $\alpha = 115^\circ$
- c $v = 20$ en $\alpha = 300^\circ$
- d $v = 20$ en $\alpha = 270^\circ$

Opgave 2

Bereken alle overige zijden en hoeken van $\triangle ABC$ als gegeven is (geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig):

- a** $a = 5$, $b = 6$ en $c = 4$.
- b** $a = 5$, $b = 6$ en $\gamma = 120^\circ$.
- c** $a = 5$, $b = 6$ en $\beta = 120^\circ$.
- d** $c = 12$, $\alpha = 50^\circ$ en $\beta = 60^\circ$.
- e** $a = 12$, $b = 6$ en $\alpha = 90^\circ$.
- f** $a = c = 10$ en $\gamma = 81^\circ$.

Opgave 3

- a** Van $\triangle ABC$ is gegeven dat $|AB| = 8$, $|BC| = 6$ en $\angle B = 60^\circ$.
Bereken $|AC|$ exact.
- b** Van $\triangle DEF$ is gegeven dat $|DE| = \sqrt{3}$, $|DF| = 3$ en $\angle E = 120^\circ$.
Bereken $|EF|$ exact.

Opgave 4

De breedte van een rivier bepaal je vanuit een duidelijk herkenbaar punt P op de tegenoverliggende oever. Langs de oever waarop je zelf staat, zet je een lijnstuk AB van bijvoorbeeld 10 m uit. Vervolgens meet je de hoeken van AP met AB en van BP met AB . Bereken de breedte van de rivier als $\angle BAP = 65^\circ$ en $\angle ABP = 54^\circ$.

Opgave 5

Tussen drie palen die loodrecht op de grond staan, is heel strak een driehoekig zeil gespannen. Paal 1 staat 5 m van paal 2, paal 2 staat 4 m van paal 3 en paal 3 staat 3 m van paal 1. Het zeil is op 2 m boven de grond aan paal 1, op 2,5 m boven de grond aan paal 2 en op 3,5 m boven de grond aan paal 3 bevestigd. Bereken de oppervlakte van dit zeil.

Opgave 6

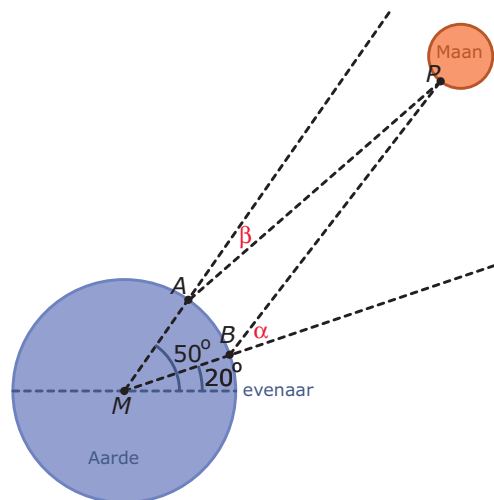
Gegeven is een driehoek waarvan de lengtes van de zijden a , b en c zijn. Bereken in de volgende gevallen de grootte van de hoek α tegenover de zijde met lengte a .

- a** $a^2 = b^2 + c^2$
- b** $a^2 = b^2 + c^2 - bc$
- c** $a^2 = b^2 + c^2 + 0,5bc$

Toepassen

Opgave 7: Afstand Aarde - Maan

De afstand van het middelpunt M van de Aarde tot een punt P op de Maan kun je berekenen door op dezelfde lengtegraad op twee verschillende punten A en B een kijker op punt P te richten. Neem aan dat de Aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40000 km en neem ook aan dat de Maan precies recht boven de lengtegraad staat waar A en B op liggen, dus M , A , B en P liggen in één vlak. Je meet nu de hoeken die de kijker met MA en met MB maakt (dus met lijnen loodrecht op het aardoppervlak). Stel dat A op 50° N.B. ligt en B op 20° N.B. Beschrijf hoe je vanuit de gemeten hoeken de afstand MP berekent.

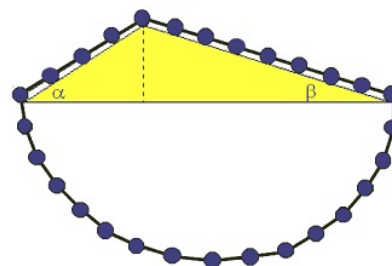


Figuur 2

Opgave 8: Cloatkransbewijs

In een tijd dat krachten nog niet als vectoren werden ontbonden bedacht Simon Stevin wat de kracht moet zijn die een massa uitoefent op een helling. Hij deed dat niet door een experiment, maar door een simpele redenering.

Hang een ketting van kralen over een punt dat twee hellingen verbindt. Welke kracht oefent de ketting uit op het punt, vanaf links en vanaf rechts? Het vrij hangende gedeelte trekt aan beide kanten even hard. De ketting beweegt niet, dus het gewicht van de ketting links is evenredig met de lengte van de helling links. De kracht die dat gewicht dan effectief uitoefent moet gelijk zijn aan de kracht die het rechterstuk uitoefent. Dus moet die kracht evenredig zijn met de lengte van de andere zijde. Dus verhouden de krachten zich omgekeerd met de lengtes van de hellingen. Je kunt dit ook controleren door de krachten te ontbinden in vectoren. En dan de sinusregel toe te passen. Laat zien hoe dat gaat. (Zie ook: [Cloatkransbewijs in Wikipedia](#))



Figuur 3

Examen

Opgave 9: Schaatshouding

Omdat de houding die een schaatser aanneemt van invloed is op zijn snelheid, is deze zogeheten schaatshouding onderzocht.

Hierbij is gekeken naar de driehoek die wordt gevormd door het heupgewricht H , het kniegewricht K en het enkelgewricht E .

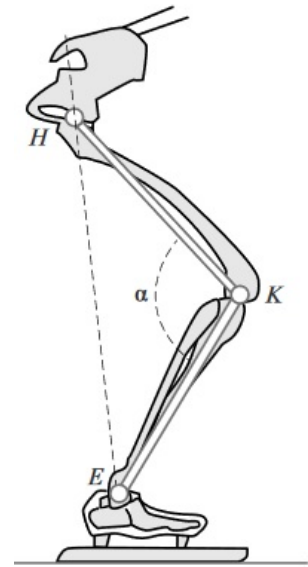
De hoek in graden tussen het dijbeen (HK) en het scheenbeen (KE) is de kniehoek α . Zie de figuur.

We bekijken eerst een schaatser met een dijbeenlengte van 48 cm en een scheenbeenlengte van 42 cm.

Op een bepaald moment geldt voor deze schaatser:

$$HE = 69 \text{ cm en } \alpha = 100^\circ.$$

- Bereken $\angle HEK$ in graden nauwkeurig.
- Op het moment van de afzet geldt voor deze schaatser: $HE = 88 \text{ cm}$.
Bereken de kniehoek α op het moment van de afzet. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.



Figuur 4

De snelheid waarmee HE verandert, bepaalt mede de snelheid van de schaatser. Bij het schaatsen op een schaats met vaste ijzers kan het been bij de afzet niet volledig gestrekt worden.

Bij het schaatsen op een klapschaats is het wel mogelijk het been bij de afzet geheel te strekken. Hierbij neemt de kniehoek in 0,70 seconden toe van 100° tot 180° .

Voor een bepaalde schaatser op klapschaatsen geldt:

$$HE = \sqrt{3625 - 3600 \cos \alpha}.$$

Hierbij is α in graden en HE in cm.

- Bereken de gemiddelde snelheid waarmee bij deze schaatser op klapschaatsen HE verandert als α toeneemt van 100° tot 180° . Geef je antwoord in een geheel aantal cm per seconde.



Figuur 5

(bron: pilotexamen havo B in 2012, eerste tijdvak)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
