

2.2 Sin, cos, tan

Inleiding

Een vliegtuig legt 500 km af met een koers van 30° ten opzichte van het noorden. Hoeveel km verplaatst het vliegtuig zich in Noordelijke richting? Dit kun je nauwkeurig berekenen met behulp van goniometrie. Er is immers sprake van een rechthoekige driehoek. Maar wat als de windrichting bijvoorbeeld 120° is?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- sinus, cosinus en tangens gebruiken om componenten van vectoren te berekenen;
- sinus, cosinus en tangens van hoeken boven de 90° gebruiken.

Voorkennis

- werken met goniometrische verhoudingen in rechthoekige driehoeken;
- vectoren met gegeven richting en lengte tekenen en de componenten bepalen door meting;
- van vectoren gegeven door hun x- en y-componenten de lengte en de richtingshoek berekenen.

Verkennen

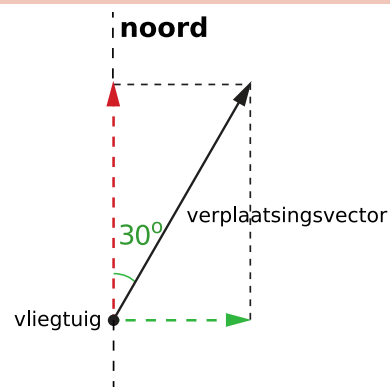
Opgave V1

Bekijk de applet

Je ziet een vliegtuig met een gegeven verplaatsingsvector. Kun je nu nauwkeurig vaststellen hoeveel het in noordelijke dan wel oostelijke richting is verplaatst? Met andere woorden, kun je de noordelijke component en de oostelijke component berekenen?

Stel je voor dat de verplaatsing 500 km bedraagt en de richtingshoek 30° is.

- Bereken de noordelijke component en de oostelijke component met behulp van sinus en/of cosinus.
- Bereken ook de noordelijke component bij een richtingshoek van 120° . Waarom is hij negatief?



Figuur 2

Uitleg

Bekijk de applet

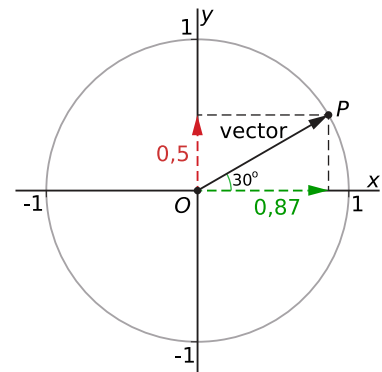
Je hebt al eerder leren werken met sinus, cosinus en tangens van allerlei hoeken.

Bekijk de eenheidscirkel (de cirkel met middelpunt O en straal 1) met een vector met een lengte van 1 en aangrijpingspunt O in een assenstelsel. Met behulp van de richtingshoek α kun je de componenten van deze vector berekenen met goniometrie.

$$v_x = 1 \cdot \cos(30^\circ) \text{ dus } v_x = \cos(30^\circ) \approx 0,87$$

$$v_y = 1 \cdot \sin(30^\circ) \text{ dus } v_y = \sin(30^\circ) \approx 0,5$$

$v_x = \cos(\alpha)$ en $v_y = \sin(\alpha)$ geldt voor alle richtingshoeken van eenheidsvectoren. Je ziet in de eenheidscirkel dat voor hoeken tussen 90° en 270° de cosinus negatief is en ook dat voor hoeken tussen 180° en 360° de sinus negatief is.



Figuur 3

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg](#).

- Leg uit dat voor hoeken tussen 90° en 180° de cosinus van de hoek negatief is en de sinus van de hoek positief is.
- Doe hetzelfde voor de tangens van de hoek.

Opgave 2

Leg uit.

- $\sin(100^\circ) = \sin(80^\circ)$
- $\cos(100^\circ) = -\cos(80^\circ)$
- $\sin(253^\circ) = -\sin(73^\circ)$
- $\cos(290^\circ) = \cos(70^\circ)$

Opgave 3

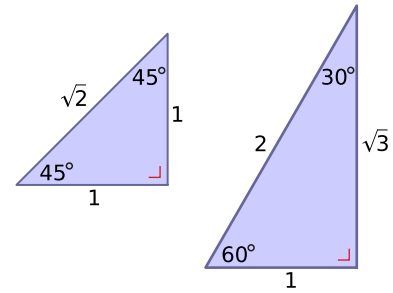
Bereken met je rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig de componenten v_x en v_y van een verplaatsingsvector met lengte 1 bij de volgende richtingshoeken.

- 40°
- 140°
- 240°
- 340°

Opgave 4

Van een paar hoeken kun je de sinus, de cosinus en de tangens exact berekenen. Omdat die hoeken regelmatig voorkomen, is het handig om die exacte waarden te weten. Bekijk daartoe deze twee bijzondere tekendriehoeken. De rechter is een halve gelijkzijdige driehoek en de linker is een geodriehoek.

- Bereken exact sinus, cosinus en tangens van 60° en van 30° .
- Bereken exact sinus, cosinus en tangens van 45° .
- Maak een tabel met de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van 0° , 30° , 45° , 60° en 90° .



Figuur 4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

In de **eenheidscirkel** (de cirkel om O met straal 1) zie je een vector met aangrijpingspunt O en met een lengte van 1 in een assenstelsel. Alfa is de hoek van de vector met de x -as. De componenten van zo'n vector zijn:

$$v_x = \cos(\alpha)$$

$$v_y = \sin(\alpha)$$

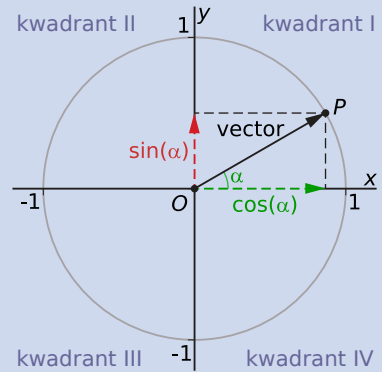
Dit geldt voor alle mogelijke hoeken α .

α kan dus groter zijn dan 180° , maar ook negatief zijn.

Het assenstelsel verdeelt het vlak in vier **kwadranten**. Voor hoeken in het tweede kwadrant (linksboven) is de cosinus negatief en de sinus positief. Voor hoeken in het derde kwadrant (linksonder) zijn de cosinus en de sinus beide negatief. Voor hoeken in het vierde kwadrant (rechtsonder) is de cosinus positief en de sinus negatief.

$$\text{Verder geldt: } \tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x}$$

Is de lengte van de vector niet 1, maar bijvoorbeeld r , dan worden beide componenten ook r keer zo groot. De **componenten van een vector** met lengte r en **richtingshoek** α zijn: $v_x = r \cos(\alpha)$ en $v_y = r \sin(\alpha)$.



Figuur 5

Exacte waarden sinus, cosinus en tangens					
hoek	0°	30°	45°	60°	90°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Tabel 1

Voorbeeld 1**Bekijk de applet**

Bereken exact de sinus, cosinus en tangens van hoeken van 60° , 120° , 240° en 300° . Gebruik eventueel een schets van een eenheidscirkel.

Antwoord

Bekijk de eenheidscirkel, een vector met lengte 1 en richtingshoek α . Als $\alpha = 60^\circ$ dan is de x-component van deze vector precies $\frac{1}{2}$ (als je spiegelt in de lijn PQ zie je dat $\triangle OPQ$ de helft van een gelijkbenige driehoek is). Met de stelling van Pythagoras bereken je dan de lengte van de y-component:

$$v_y = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Daarom is } \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

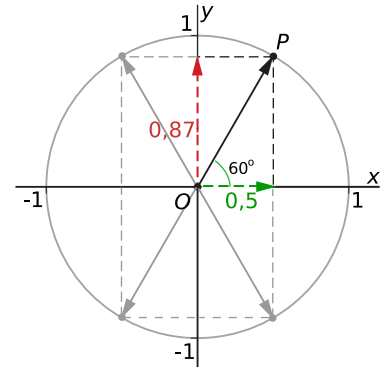
Voor de andere hoeken gebruik je spiegeling in de x- en y-as. Zo is:

$$\sin(120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(120^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$$

En op dezelfde manier vind je sinus, cosinus en tangens van 240° en 300° .



Figuur 6

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de exacte waarden van de sinus, de cosinus en de tangens van 120° kunt afleiden uit die van 60° . Bepaal nu zelf de exacte waarden van sin, cos en tan van 240° en 300° .

Opgave 6

Teken in een assenstelsel een vector met lengte 1 en richtingshoek 45° .

- Bepaal de exacte waarden van $\sin(135)$, $\cos(135)$ en $\tan(135)$.
- Bepaal de exacte waarden van $\sin(225)$, $\cos(225)$ en $\tan(225)$.
- Bepaal de exacte waarden van $\sin(315)$, $\cos(315)$ en $\tan(315)$.

Opgave 7

Teken in een assenstelsel een vector met lengte 1 en richtingshoek 30° .

- Bepaal de exacte waarden van $\sin(150^\circ)$, $\cos(135^\circ)$ en $\tan(150^\circ)$.
- Bepaal de exacte waarden van $\sin(210^\circ)$, $\cos(210^\circ)$ en $\tan(210^\circ)$.
- Bepaal de exacte waarden van $\sin(330^\circ)$, $\cos(330^\circ)$ en $\tan(330^\circ)$.

Opgave 8

Gebruik, indien mogelijk, de exacte waarden van sinus, cosinus en tangens van 0° , 30° , 45° , 60° en 90° .

- a** Bepaal alle hoeken α tussen 0° en 360° die voldoen aan $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

- b Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken β tussen 0° en 360° die voldoen aan $\sin(\beta) = -0,6$.
- c Bepaal in graden nauwkeurig alle hoeken γ tussen 0° en 360° die voldoen aan $\tan(\gamma) = -0,6$.

Voorbeeld 2

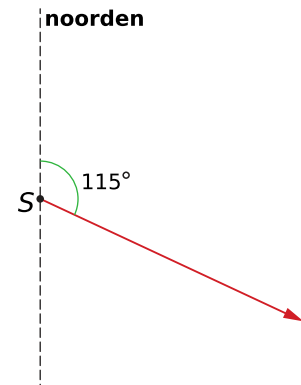
Een schip vaart 40 km met een koers van 115° ten opzichte van het noorden. Kompaskoersen worden altijd rechtsonder gemeten.

Hoeveel heeft het schip zich in noordelijke of zuidelijke richting verplaatst? Gebruik een tekening op schaal om eerst een schatting te meten.

Antwoord

Aan de tekening is te zien dat het schip zich in zuidelijke (en oostelijke) richting heeft verplaatst. Dat klopt ook, want de component in zuidelijke richting van de koersvector is: $v_Z = 40 \cos(115^\circ) \approx -16,9$ km.

Het schip heeft zich 16,9 km naar het zuiden verplaatst.



Figuur 7

Opgave 9

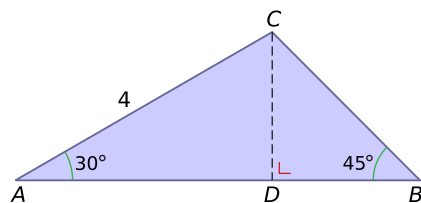
Bekijk **Voorbeeld 2**. Een schip vaart 80 km met een koers van 215° ten opzichte van het noorden. Hoeveel heeft het schip zich in noordelijke of zuidelijke richting verplaatst? En hoeveel in de oostelijke of de westelijke richting? Gebruik een tekening op schaal om eerst een schatting te meten. Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Bekijk $\triangle ABC$ met $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ en $AC = 4$ cm. Bereken de exacte lengte van AB .

Antwoord

Zonder rechte hoeken kun je niet met sin, cos en/of tan werken. Dus maak je eerst rechte hoeken.



Figuur 9

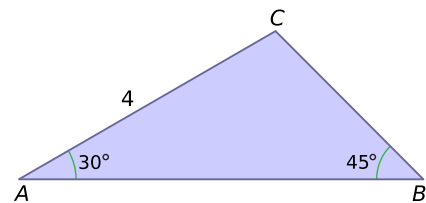
Vat je AC als vector op, dan zijn AD en DC de componenten daarvan:

$$|AD| = 4 \cos(30^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$|CD| = 4 \sin(30^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$|DB| = |CD| = 2$ ($\triangle DBC$ is een gelijkbenige driehoek).

Dus is de gevraagde lengte: $|AB| = |AD| + |DB| = 2\sqrt{3} + 2$.



Figuur 8

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 3**. Stel dat $AC = 6$. Bereken op dezelfde manier de exacte lengte van AB .

Opgave 11

Teken $\triangle KLM$ met $\angle K = 60^\circ$, $\angle L = 45^\circ$ en $|LM| = 4$ cm. Bereken de exacte lengte van KL en KM .

Opgave 12

Teken $\triangle PQR$ met $\angle P = 50^\circ$, $\angle Q = 35^\circ$ en $|PR| = 6$ cm. Bereken de lengte van PQ en QR . Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 13

Bereken de x - en de y -componenten van de volgende vectoren. Geef waar mogelijk exacte uitkomsten.

- a $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 135^\circ$
- b $|\vec{v}| = 5$ en $\alpha = 210^\circ$
- c $|\vec{v}| = 4$ en $\alpha = 320^\circ$
- d $|\vec{v}| = 2$ en $\alpha = 270^\circ$

Opgave 14

Bereken in graden nauwkeurig alle hoeken α met $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ waarvoor geldt:

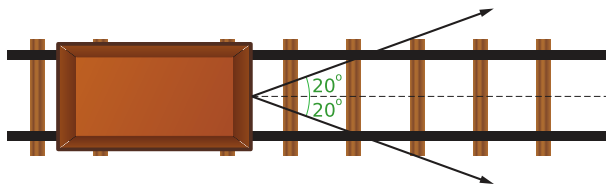
- a $\cos(\alpha) = 0,38$
- b $\sin(\alpha) = 0,38$
- c $\cos(\alpha) = -0,38$
- d $\sin(\alpha) = -0,38$
- e Teken een eenheidscirkel om het verband te vinden tussen $\cos(\alpha)$ en $\cos(-\alpha)$. Doe hetzelfde voor $\cos(\alpha)$ en $\cos(180^\circ - \alpha)$.

Opgave 15

Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ en $|AC| = 5$ cm. Bereken de exacte lengte van AB en BC .

Opgave 16

Twee personen trekken elk aan een touw een lorrie voort. Ze lopen beiden op dezelfde afstand van het midden van de rails. De hoek tussen beide touwen is 40° . De grootte van elke kracht is 7 N.



Figuur 10

- a Bereken de kracht die ze samen uitoefenen in de bewegingsrichting van de lorrie in één decimaal nauwkeurig.
- b Doe hetzelfde voor de situatie waarin de ene persoon trekt met een kracht van 8 N onder een hoek van 20° ten opzichte van de rails en de ander trekt met een kracht van 6 N onder een hoek van 15° ten opzichte van de rails.
- c In welke van beide situaties loopt de lorrie soepeler over de rails? Verklaar je antwoord.

Opgave 17

Bekijk deze foto van een huis met een zogenaamd mansardedak.

De breedte van het huis is 6 meter en de breedte van elk dakdeel is 2,5 meter. De onderste dakdelen maken een hellingshoek van 65° met een horizontaal vlak.

- Bereken de hoogte van het huis als de dakgoot op 3 meter boven de begane grond zit.
- Bereken de hellingshoek van de bovenste dakdelen.



Figuur 11

Toepassen**Opgave 18: Noodlanding**

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h in de koers 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na 1,5 uur moet hij een noodlanding maken. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bereken de verplaatsingsvector van de helikopter.

Opmerking: Dit is dezelfde opgave als in Test jezelf van de vorige paragraaf, maar het verschil is dat je bij de vorige paragraaf nog mocht meten en nu moet je berekenen.

Testen**Opgave 19**

Gegeven zijn de punten $P(0,8)$ en $Q(12,3)$.

- Bereken $|\overrightarrow{PQ}|$ en de hoek die $\overrightarrow{PQ}$ met de positieve x -as maakt.
- $\overrightarrow{OR}$ is even lang als $\overrightarrow{PQ}$ maar heeft een richtingshoek van 120° met de positieve x -as. Bereken de exacte coördinaten van R .

Opgave 20

Bereken (exact indien mogelijk, anders in graden nauwkeurig) alle hoeken α met $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ waarvoor geldt:

- $\sin(\alpha) = -0,83$
- $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Opgave 21

Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 135^\circ$, en $|AC| = 10$. Bereken de exacte lengte van AB en BC .



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
