

2.1 Vectoren

Inleiding

Bij schepen en vliegtuigen speelt naast de snelheid ook de koers een belangrijke rol. Die koers wordt vastgelegd door de hoek ten opzichte van het noorden. In feite heb je het bij beide over een snelheidsvector, een combinatie van snelheid (de lengte van de pijl) en koers (de richtingshoek).



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat een vector is;
- de begrippen draaihoek en lengte van een vector;
- vectoren in componenten ontbinden;
- werken met componenten van vectoren.

Voorkennis

- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals: loodrecht, evenwijdig, hoek, afstand en dergelijke (eventueel sinus, cosinus, tangens), gebruiken;
- werken met lijnen, hun richtingscoëfficiënten en richtingshoeken.

Verkennen

Opgave V1

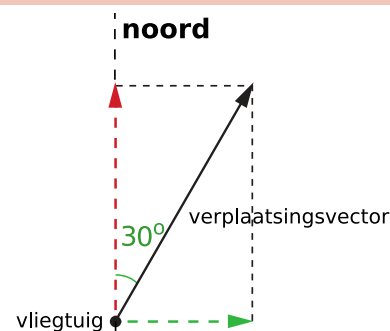
Bekijk de applet

De koers van een vliegtuig is de hoek die zijn vliegrichting maakt met het noorden. Zo'n hoek wordt rechtsom (met de wijzers van de klok mee) gemeten. De verplaatsing van het vliegtuig heeft een richtingshoek (de koers) en een lengte (de afstand). Hij is op te splitsen in een noordelijke component en een oostelijke component.

- a** Als de verplaatsing een grootte heeft van 500 km en een richtingshoek van 30° , hoe groot zijn dan de noordelijke component en de oostelijke component? (Maak een tekening en meet de lengtes van de componenten, waarbij $100 \text{ km} = 2 \text{ cm}$.)

Je kunt de hoek van de verplaatsing aanpassen. Vergroot de hoek.

- b** Bij welke hoek wordt de noordelijke component een zuidelijke component?
- c** Bij welke hoek is de zuidelijke component even sterk als de noordelijke component bij 30° ?
- d** Bij welke hoek wordt de oostelijke component een westelijke component?



Figuur 2

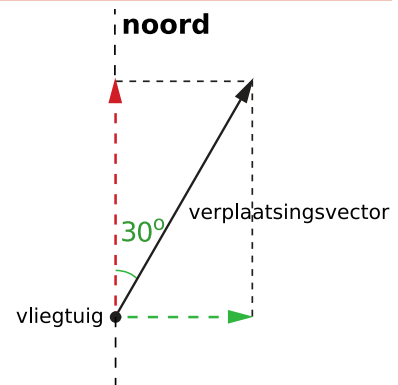
Uitleg

Bekijk de applet

Wanneer zowel grootte als richting een rol speelt, gebruik je een vector. Bijvoorbeeld om de verplaatsing van een vliegtuig weer te geven. De lengte van de verplaatsingsvector is de afstand in km, de richting is de richtingshoek ten opzichte van het noorden. Bekijk de verplaatsingsvector $(30^\circ, 500)$.

- 30° is de hoek met het noorden;
- 500 is de afstand in km.

De vector heeft twee componenten: een noordelijke component en een oostelijke component. Die componenten kunnen ook negatief zijn, afhankelijk van hun richting. De noordelijke component is negatief als hij naar het zuiden wijst. De oostelijke component is negatief als hij naar het westen wijst. Deze twee componenten kun

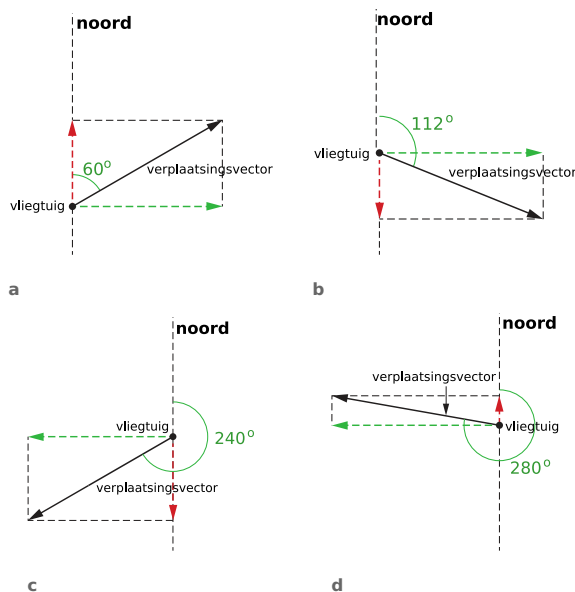


Figuur 3

je bepalen door de vector te ontbinden in de twee richtingen (noord en oost) en ze te meten. Het punt waar de vector begint, heet het aangrijpingspunt. Als er meerdere vliegtuigen op verschillende plaatsen vertrekken, zijn de aangrijpingspunten verschillend. Toch kunnen de verplaatsingsvectoren wel gelijk zijn.

Opgave 1

Je ziet vier keer een verplaatsingsvector getekend. Ga er van uit dat elke verplaatsingsvector een lengte heeft van 400 m. Teken zelf de figuren op schaal 1 : 10000, dus elke 100 m wordt 1 cm. Bepaal bij elke situatie de lengtes van de noordelijke component en de oostelijke component. Geef met behulp van mintekens de richting aan.



Figuur 4

Opgave 2

Van een verplaatsingsvector zijn de componenten gegeven. Bereken de lengte van deze vector en maak er eventueel een tekening van. Bepaal ook de grootte van de bijbehorende richtingshoek α (door opmeten of met behulp van tangens).

- noordelijke component: 200 km, oostelijke component: 100 km.
- noordelijke component: -300 km, oostelijke component: 400 km.

- c noordelijke component: -200 km, oostelijke component: 300 km.
- d noordelijke component: -200 km, oostelijke component: -150 km.
- e noordelijke component: 0 km, oostelijke component: -100 km.
- f noordelijke component: -200 km, oostelijke component: 0 km.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **vector** $\vec{v}$ is een grootte met lengte en richting. Je kunt hem beschrijven door:

- de **lengte** r van de vector, en
- de **richtingshoek** α , de hoek die de vector met de gekozen hoofdrichting maakt.

In een assenstelsel is de hoofdrichting altijd de positieve x -as en wordt de richtingshoek linksom (tegen de wijzers van de klok in) gemeten. De vector kun je dan beschrijven door aan te geven hoe groot de **x -component** v_x en de **y -component** v_y zijn. De x -component is positief als hij in de positieve x -richting wijst, anders negatief. De y -component is positief als hij in de positieve y -richting

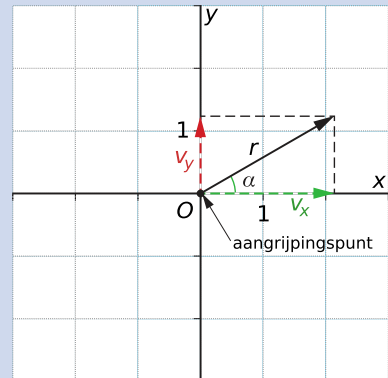
wijst, anders negatief. Je noteert de vector als $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

De lengte van deze vector is $|\vec{v}| = r = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$.

De getekende vector heeft de oorsprong O als **aangrijpingspunt**. Er zijn echter gelijke vectoren te tekenen die een ander aangrijpingspunt hebben.

In de wiskunde zijn twee vectoren gelijk als hun lengtes en hun richtingshoeken gelijk zijn.

De vector die van de oorsprong O naar punt A wijst, schrijf je als $\vec{OA}$.



Figuur 5

Voorbeeld 1

In een cartesisch assenstelsel zijn de punten $A(-5,2)$, $B(-28,16)$ en $C(-23,14)$ gegeven.

Laat zien dat de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{CB}$ gelijk zijn. Bereken hun lengtes en hun richtingshoeken.

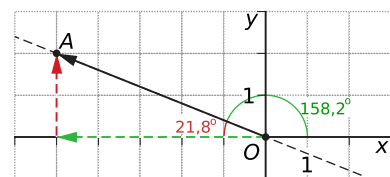
Antwoord

In een assenstelsel is de hoofdrichting de positieve x -richting.

De componenten van $\vec{OA}$ zijn daarom -5 en 2, dus $\vec{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De componenten van $\vec{CB}$ zijn $-28 - (-23) = -5$ en $16 - 14 = 2$, dus $\vec{CB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Je ziet meteen dat beide vectoren gelijk zijn, hun kentallen zijn immers gelijk.



Figuur 6

De lengte van $\overrightarrow{OA}$ is: $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

De richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$ wordt bepaald door de hellingshoek α van lijn OA en daarvoor geldt: $\tan(\alpha) = \frac{2}{-5}$. Die hoek is ongeveer $21,8^\circ$. De richtingshoek van $\overrightarrow{OA}$ is $180^\circ - 21,8^\circ = 158,2^\circ$.

$\overrightarrow{CB}$ heeft dezelfde kentallen en dus dezelfde lengte en richtingshoek.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven zijn in een cartesisch assenstelsel de punten $A(-2,1)$, $B(1,6)$, $C(-28,17)$ en $D(-31,12)$. Bereken $|\overrightarrow{AB}|$ en $|\overrightarrow{DC}|$ en de richtingshoeken van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Laat zien dat beide vectoren gelijk zijn.

Opgave 4

Bepaal de lengte en richtingshoek α van de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

b $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \end{pmatrix}$

c $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

d $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

e $\vec{e} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$

f $\vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \end{pmatrix}$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

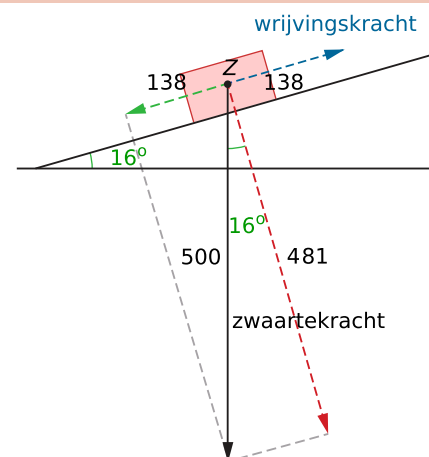
Een blok hout ligt op een hellend vlak. Het ondervindt een zwaartekracht van 500 N. (In de figuur zijn alle krachten in eenheden van 100 N uitgedrukt.)

Bij welke hellingshoek begint het blok te glijden als de maximale wrijvingskracht 200 N is?

Antwoord

Het blok begint te glijden als de component van de zwaartekracht langs het hellende vlak net iets groter is dan de wrijvingskracht, dus net iets meer is aan 200 N. Bij precies 200 N is de component van de zwaartekracht loodrecht op het hellende vlak $\sqrt{500^2 - 200^2} \approx 458$ N. De hellingshoek van het hellende vlak is gelijk aan de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht. Dit betekent: $\tan(\alpha) \approx \frac{200}{458}$

dus de gevraagde hoek is $23,6^\circ$. Om α te berekenen, gebruik je de arctan-functie. Op sommige rekenmachines is dat de functie $\tan^{-1}$.



Figuur 7

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2** voor een toepassing van het werken met vectoren in de natuurkunde.

- Bekijk de beginsituatie in de figuur. In feite is 200 N de maximale wrijvingskracht. Hoe groot zal in dit geval de component langs het hellende vlak zijn?
- Reken zelf na bij welke hellingshoeken het gewicht blijft liggen.
- Licht toe waarom de hoek tussen de component loodrecht op het hellende vlak en de zwaartekracht altijd gelijk is aan de hellingshoek van het vlak.
- Hoe groot zou de maximale hellingshoek zijn waarbij het gewicht nog blijft liggen op het hellende vlak, als de maximale wrijvingskracht 300 N is?

Verwerken**Opgave 6**

Een vector $\vec{v}$ heeft een gegeven lengte en een gegeven richtingshoek α ten opzichte van de positieve x-as. Teken deze vector en bepaal door meting de x-component en de y-component. Rond zo nodig af op één decimaal.

- $|\vec{v}| = 4$ en $\alpha = 225^\circ$
- $|\vec{v}| = 5$ en $\alpha = 150^\circ$
- $|\vec{v}| = 6$ en $\alpha = 330^\circ$
- $|\vec{v}| = 3$ en $\alpha = 270^\circ$

Opgave 7

Gegeven is telkens een vector $\vec{v}$ door zijn x- en y-componenten. Bereken de lengte en de richtingshoek α van deze vector. Rond zo nodig af op één decimaal.

- $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ -50 \end{pmatrix}$
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}$

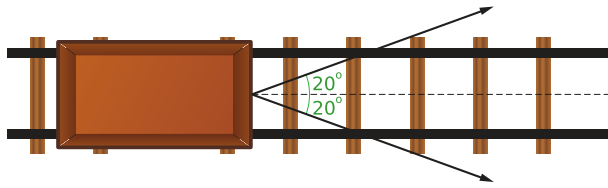
Opgave 8

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met hoekpunten $A(-23,61)$, $B(7,51)$, $C(-3,91)$ en $D(-33,101)$. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van $ABCD$.

- Bepaal de componenten van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DC}$. Toon met behulp van deze twee vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.
- Het snijpunt van de diagonalen is $S(-13,76)$. Toon met behulp van de vectoren $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{BS}$ en $\overrightarrow{SD}$ aan dat vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

Opgave 9

Een lorrie is een karretje dat op rails loopt. Twee personen trekken de lorrie met dezelfde kracht van 8 N, elk aan een touw.

**Figuur 8**

- Geef een schatting van de kracht waarmee beide personen samen aan het karretje in de richting van de rails trekken. Licht je antwoord toe.
- Beantwoord dezelfde vraag als de éne persoon met een kracht van 8 N trekt en de andere met een kracht van 6 N. De hoeken blijven gelijk.

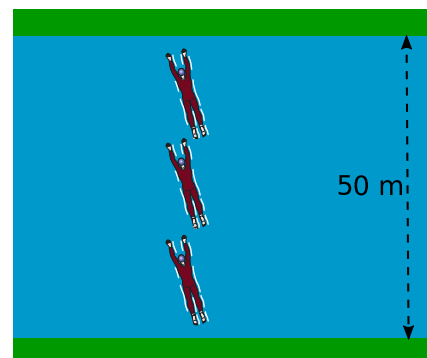
Opgave 10

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met de hoekpunten $A(5,9)$ en $B(8,8)$. Verder is de x -coördinaat van C 14. En is $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, waarbij S het snijpunt is van de diagonalen AC en BD van vierhoek $ABCD$.

Toon aan dat deze vierhoek een vlieger is en bepaal de y -coördinaat van C .

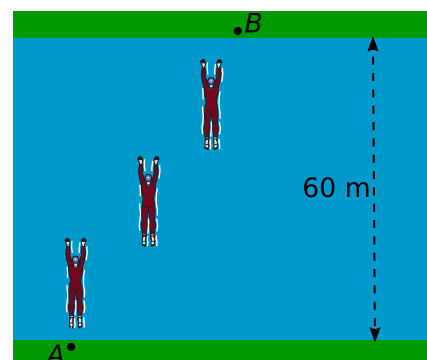
Toepassen**Opgave 11: Zwemmer (1)**

Iemand zwemt met een snelheid van 2 km/h schuin tegen de stroom van een rivier in met een stroomsnelheid van 0,6 km/h. Daardoor steekt hij de rivier precies loodrecht op de oevers (en de stroomrichting) in de breedte over. De rivier is 50 meter breed. Hoelang doet hij over de overtocht? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

**Figuur 9****Opgave 12: Zwemmer (2)**

Een zwemmer probeert een rivier met een breedte van 60 meter recht over te steken, maar heeft last van de stroming. Daardoor komt hij niet recht tegenover zijn startpunt A op de andere oever aan, maar op een punt B dat verder stroomafwaarts ligt. De stroomsnelheid is 0,6 km/h en de zwemmer bereikt in vijf minuten de overkant van de rivier.

Bereken de snelheid waarmee hij AB aflegt in km/h. Rond af op drie decimalen.

**Figuur 10**

Opgave 13: Sportvliegtuig

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld T en vliegt drie uur met een constante snelheid van 140 km/h in een koers van 30° ten opzichte van het noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na anderhalf uur moet hij een noodlanding maken.

- a Maak van deze vlucht een tekening op schaal.
- b Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bepaal de verplaatsingsvector van de helikopter. Reken daarmee ook de koershoek (ten opzichte van het noorden) en de lengte van de verplaatsingsvector uit.

Testen**Opgave 14**

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- a Bereken de lengte van beide vectoren in twee decimalen nauwkeurig.
- b Bereken de richtingshoek van beide vectoren in graden nauwkeurig.

Opgave 15

Gegeven zijn de punten $P(2,12)$, $Q(10,2)$ en $R(15,6)$.

- a Bereken $|\overrightarrow{PQ}|$ en de richtingshoek van $\overrightarrow{PQ}$.
- b Laat zien dat $\angle PQR = 90^\circ$.

Practicum: GeoGebra IV

Je kunt GeoGebra heel goed gebruiken om rechten en krommen met een gegeven vergelijking in beeld te brengen. Je ziet dan meteen of er snijpunten zijn. En met GeoGebra kun je gemakkelijk snijpunten van twee (rechte of kromme) lijnen in de figuur aangeven. Ook kun je in GeoGebra met **vectoren** werken:

- Vector tussen twee punten: Maakt een vector van het eerst aangeklikte punt naar het tweede punt.
- Vector met beginpunt: Maakt een vector vanuit een aangeklikt punt die gelijk is aan de aangeklikte vector. Dit gebruik je vooral om gelijke vectoren te maken.
- Algebraïsche invoer van een vector met gegeven kentallen: $v=(-5,2)$ geeft de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong van het assenstelsel. Merk op dat GeoGebra vectoren en coördinaten op dezelfde manier noteert!



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
