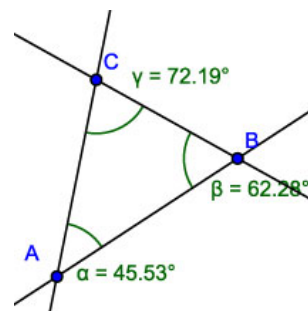


## 1.5 Hoeken

### Inleiding

Bij het ontwerpen van een gebouw of een brug of viaduct spelen hoeken en afstanden, lengtes, een grote rol. Bij ontwerpen wordt gebruik gemaakt van technische teken- en berekensoftware. Voorbeelden daarvan zijn AutoCAD en Illustrator. Bedenk dat computers alles (dus ook tekst, muziek en tekeningen) verwerken in getallen. Dan begrijp je waarom coördinaten zo belangrijk zijn voor het tekenen op computers.



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- de hoek tussen twee lijnen berekenen;
- bepalen wanneer twee lijnen loodrecht op elkaar staan;
- de vergelijking opstellen van een lijn loodrecht op een gegeven lijn en door een gegeven punt.

### Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- het hellingsgetal berekenen van een lijn door twee punten;
- snijpunten van rechte en/of kromme lijnen berekenen.

### Verkennen

#### Opgave V1

Gegeven is een lijn met vergelijking  $2x + 4y = 9$ .

- Welke vergelijking heeft de lijn door  $O(0,0)$  die er loodrecht op staat?
- Ontdek je een verband tussen beide vergelijkingen?

### Uitleg 1

#### Bekijk de applet

Om de hoek tussen twee lijnen te berekenen, bereken je de grootte van de hellingshoek (de hoek met de  $x$ -as) van beide lijnen. Deze hellingshoeken trek je van elkaar af.

Bekijk de figuur.

Je ziet de lijnen  $l : y = 0,25x + 1$  en  $m : y = 0,5x$ .

De grootte van de hellingshoek van  $l$  bereken je zo:

- $l$  heeft als hellingsgetal, ofwel richtingscoëfficiënt 0,25.

Je ziet in de figuur een rechthoekige driehoek waarvoor geldt:

$$\tan(\beta) = \frac{0,25}{1} = 0,25 \text{ en dus is } \beta \approx 14,04^\circ;$$

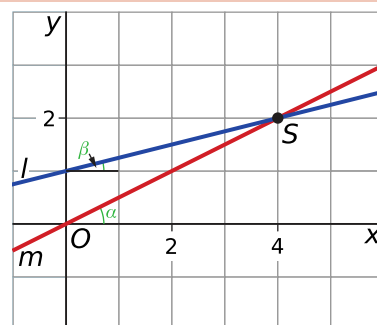
Om terug te rekenen vanuit de tangens gebruik je  $\arctan(0,25)$ .

De grafische rekenmachine kent hiervoor een functie als  $\tan^{-1}$ , of  $\arctan$ .

- Voor  $m$  geldt  $\tan(\alpha) = 0,5$ . Dan is  $\alpha = \arctan(0,5) \approx 26,57^\circ$ .

Bereken de hoek tussen de lijnen:  $26,57^\circ - 14,04^\circ \approx 12,53^\circ$ .

Opmerking: bij een negatieve richtingscoëfficiënt hoort ook een negatieve richtingshoek, je draait als het ware de andere kant op vanuit de  $x$ -as. De hellingshoek ligt zo altijd tussen de  $-90^\circ$  en  $90^\circ$ .



Figuur 2

**Opgave 1**Bestudeer **Uitleg 1**.

- a Bereken op dezelfde manier de hoek tussen de lijnen  $l : y = 0,5x$  en  $k : x - 3y = 6$ .
- b Bereken op dezelfde manier de hoek tussen de lijnen  $l : y = 0,5x$  en  $k : x + 3y = 6$ .

**Opgave 2**

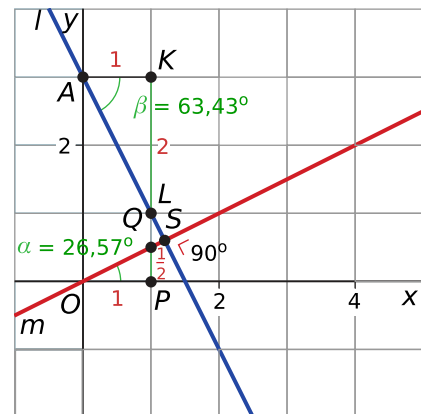
Moet je bij het berekenen van de hoek tussen twee lijnen altijd de twee hellingshoeken van elkaar aftrekken?

**Uitleg 2****Bekijk de applet**

Je ziet dat de lijnen  $l_p : y = px + 3$  en  $m : y = 0,5x$  loodrecht op elkaar staan als  $p = -2$ . Dat kun je als volgt aantonen.

Als beide lijnen loodrecht op elkaar staan, zijn de twee rechthoekige driehoeken  $OPQ$  en  $ALK$  gelijkvormig. Immers  $\angle POQ(\alpha)$  en  $\angle LAK(\beta)$  zijn dan samen  $90^\circ$ . Maar  $\angle POQ$  en  $\angle OQP$  zijn ook samen  $90^\circ$ , dus  $\angle OQP = \angle LAK$ . Beide driehoekjes hebben dezelfde hoeken en zijn dus gelijkvormig. Hun zijden hebben dezelfde verhoudingen en dus is  $\frac{|PQ|}{1} = \frac{1}{|LK|}$ . Omdat  $|PQ| = 0,5$  vind je  $|LK| = 2$ .

Hieruit blijkt dat een lijn die loodrecht staat op een lijn met een richtingscoëfficiënt van 0,5, zelf een richtingscoëfficiënt van -2 heeft. Het product van deze twee hellingsgetallen is -1 en dat blijkt altijd het geval te zijn bij lijnen die elkaar loodrecht snijden (tenzij een van beide een verticale lijn is).

**Figuur 3****Opgave 3**

Toon aan dat de lijnen  $p : y = 0,25x$  en  $q : y = -4x + 3$  loodrecht op elkaar staan.

**Opgave 4**

Welk hellingsgetal heeft de lijn die loodrecht staat op  $k : 2x - 5y = 10$ ?

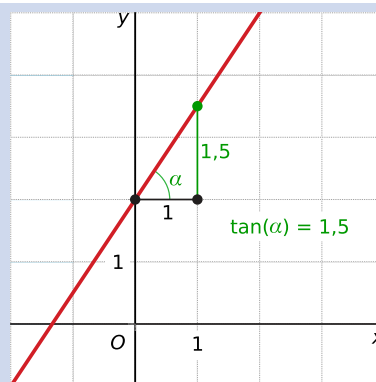
**Theorie en voorbeelden****Om te onthouden**

Elke rechte lijn heeft een vergelijking van de vorm  $ax + by = c$ .

Dit is te herleiden tot  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$  mits  $b \neq 0$ .

Dit betekent dat elke lijn (behalve een lijn evenwijdig aan de  $y$ -as) een **richtingscoëfficiënt** (hellingsgetal) van  $r = -\frac{a}{b}$  heeft en te schrijven is in de vorm  $y = rx + q$ .

Bij de richtingscoëfficiënt  $r$  hoort een **richtingshoek** (hellingshoek)  $\alpha$ , de hoek die de lijn met de positieve  $x$ -as maakt. Deze hoek ligt tussen  $-90^\circ$  en  $90^\circ$ .



Figuur 4

Er geldt:  $\tan(\alpha) = r$  als  $r \geq 0$  en  $\tan(\alpha) = -r$  als  $r < 0$ . Met behulp van deze hellingshoeken bereken je de **hoek** die twee lijnen met elkaar maken.

Als voor twee lijnen  $l$  en  $m$  met richtingscoëfficiënten  $r_l$  en  $r_m$  geldt  $r_l \cdot r_m = -1$ , dan staan beide lijnen **loodrecht** op elkaar. Staan omgekeerd twee lijnen  $l$  en  $m$  met richtingscoëfficiënten  $r_l$  en  $r_m$  loodrecht op elkaar, dan geldt  $r_l \cdot r_m = -1$ .

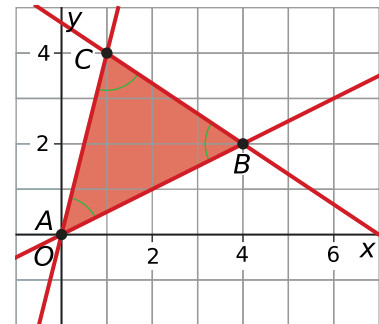
### Voorbeeld 1

[Bekijk de applet](#)

Hoe bereken je de hoeken van een driehoek  $ABC$ ?

Antwoord

Bepaal eerst de hellingsgetallen van de drie lijnen. Daarmee kun je de hoeken tussen de lijnen en de  $x$ -as berekenen. Vervolgens kun je de hoeken tussen de lijnen berekenen door de hoeken met de  $x$ -as van elkaar af te trekken. Let wel goed op dat je steeds de goede hoek berekent. Als je antwoord hoger is dan  $90^\circ$ , dan moet je dat nog van  $180^\circ$  aftrekken.



Figuur 5

### Opgave 5

Bereken zelf de hoeken van driehoek  $ABC$  met  $A(0,0)$ ,  $B(4,2)$  en  $C(1,4)$ .

### Opgave 6

Gegeven zijn de punten  $A(1,1)$ ,  $B(4,-2)$  en  $C(2,4)$ . Door deze punten gaan drie lijnen.

- Bereken de hoeken die deze drie lijnen onderling maken.
- De drie punten zijn de hoekpunten van een driehoek. Waarom is de som van de drie hoeken uit het vorige onderdeel geen  $180^\circ$ ?

### Voorbeeld 2

[Bekijk de applet](#)

Van driehoek  $ABC$  is  $A(0,0)$ ,  $B(5;2,5)$  en  $C(3,4)$ .

$\angle C$  is een rechte hoek en de lijnen  $AC$  en  $BC$  staan loodrecht op elkaar. Toon dat aan.

Antwoord

De richtingscoëfficiënt van lijn  $AC$  is  $\frac{4}{3}$ . De richtingscoëfficiënt van lijn  $BC$  is  $\frac{4-2,5}{3-5} = -\frac{3}{4}$ .

Het product van beide richtingscoëfficiënten is  $\frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{4} = -1$  en daarom staan beide lijnen loodrecht op elkaar.

Door de punten te verplaatsen, kun je veel meer rechthoekige driehoeken vinden. De berekeningen zijn dan hetzelfde, maar met andere getallen.

### Opgave 7

In driehoek  $ABC$  met  $A(2,-1)$ ,  $B(7,-2)$  en  $C(3,4)$  staan  $AB$  en  $AC$  loodrecht op elkaar. Toon dat aan.

**Opgave 8**

Toon aan dat lijn  $l$  door  $O(0,0)$  en  $P(2,5)$  loodrecht staat op lijn  $m$  door  $P(4,5)$  en  $Q(9,3)$ .

**Voorbeeld 3**

[Bekijk de applet](#)

Gegeven zijn de lijn  $l : 2x + 3y = 6$  en punt  $A(3,4)$ . Stel de vergelijking op van de lijn die door het punt  $A$  gaat en loodrecht op lijn  $l$  staat.

Antwoord

Teken de situatie.

Ga na, dat lijn  $l$  een richtingscoëfficiënt heeft van  $-\frac{2}{3}$ . Als een lijn die daar loodrecht op staat een richtingscoëfficiënt heeft van  $r$ , dan is  $-\frac{2}{3} \cdot r = -1$ . De lijn door  $A$  en loodrecht op  $l$  heeft dus een richtingscoëfficiënt van  $1,5$ . En daarom een vergelijking van de vorm  $y = 1,5x + b$ .

De lijn gaat door  $A(3,4)$  en dus moet  $4 = 1,5 \cdot 3 + b$ . Dus  $b = -0,5$  en de vergelijking wordt  $y = 1,5x - 0,5$ . Ga na dat dit in overeenstemming is met de grafiek.

**Opgave 9**

Gegeven is de lijn  $p : 3x - 4y = 12$ . Stel een vergelijking op van de lijn  $q$  door  $O(0,0)$  en loodrecht op  $p$ .

**Opgave 10**

Gegeven zijn de punten  $A(-2,5)$ ,  $B(8,0)$  en  $C(-2,1)$ . Stel een vergelijking op van de lijn door  $C$  die loodrecht staat op lijn  $AB$ .

**Verwerken****Opgave 11**

Bereken de hoek tussen de lijnen  $l$  en  $m$ .

- a  $l : y = -3x + 2$  en  $m : 4x - 2y = 9$
- b  $l : x + y = 6$  en  $m : 3x + 4y = 8$
- c  $l : 7x - 3y = 42$  en  $m : 3x + 7y = 35$

**Opgave 12**

Stel een vergelijking op van de lijn door  $P(120,31)$  die loodrecht staat op de lijn met vergelijking  $25x - 40y = 167$ .

**Opgave 13**

De middelloodlijn van een lijnstuk  $AB$  is een lijn door het midden  $M$  van  $AB$  die loodrecht op  $AB$  staat. Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk  $AB$  als  $A(1,5)$  en  $B(6,2)$ .

**Opgave 14**

Een lijn  $l$  snijdt de  $x$ -as in  $A(3,0)$  onder een hoek van  $60^\circ$ . Stel een mogelijke vergelijking op van lijn  $l$ . Zijn er meerdere mogelijkheden? Geef een verklaring.

### **Opgave 15**

Gegeven is driehoek  $ABC$  door de hoekpunten  $A(0,2)$ ,  $B(5,4)$  en  $C(2,5)$ .

- a** Bereken de drie hoeken van deze driehoek in hele graden nauwkeurig.
- b** Stel een vergelijking op van de lijn  $p$  door  $C$  loodrecht op  $AB$ .
- c**  $D$  is het snijpunt van lijn  $p$  met de lijn  $AB$ . Bereken de coördinaten van  $D$ .

- d De lengte van de hoogtelijn  $CD$  is de hoogte van driehoek  $ABC$  als je  $AB$  als basis neemt. Bereken de oppervlakte van driehoek  $ABC$  met behulp van hoogte  $CD$ .
- e Je kunt de oppervlakte van driehoek  $ABC$  ook vinden door gebruik te maken van het rooster. Ga na, dat je dan hetzelfde antwoord vindt.

## Toepassen

### Opgave 16: Kortste afstand tot lijn

Gegeven is de lijn  $l : 2x + 5y = 10$ . De kortste afstand van de oorsprong  $O$  van het assenstelsel tot deze lijn  $l$  kun je berekenen.

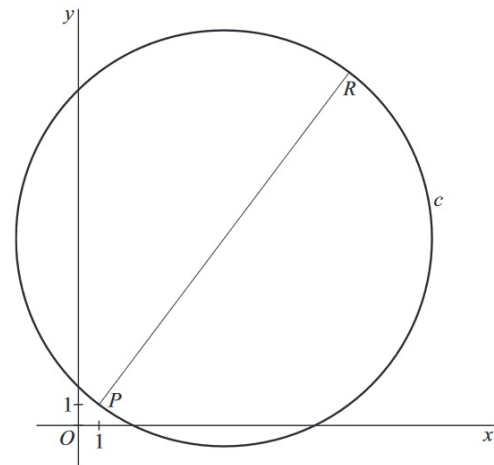
- a Stel een vergelijking op van de lijn  $m$  door  $O$  en loodrecht op  $l$ .
- b Bereken het snijpunt  $S$  van  $m$  en  $l$ .
- c De kortste afstand van  $O$  tot de lijn  $l$  is nu  $|OS|$ . Bereken  $|OS|$ .
- d Deze kortste afstand kun je ook met behulp van gelijkvormigheid berekenen. Laat zien hoe.

### Opgave 17: Cirkel om vierhoek

Gegeven zijn de punten  $P(1,1)$  en  $R(13,17)$ .  $PR$  is een middellijn van cirkel  $c$ . Zie de grafiek.

Een vergelijking van cirkel  $c$  is  $(x - 7)^2 + (y - 9)^2 = 100$ .

- a Toon dit aan.  
Punt  $S$  ligt op de cirkel en heeft dezelfde  $x$ -coördinaat als punt  $P$ . Lijn  $l$  gaat door  $S$  en staat loodrecht op lijnstuk  $PR$ .  
Lijn  $l$  heeft als vergelijking  $y = -\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4}$ .
- b Toon dit aan.  
Punt  $Q$  ligt zo op cirkel  $c$ , dat vierhoek  $PQRS$  symmetrisch is ten opzichte van diagonaal  $PR$ .
- c Bereken de coördinaten van punt  $Q$ .



Figuur 6

(bron: pilotexamen wiskunde havo B in 2011, tweede tijdvak)

## Testen

### Opgave 18

Bereken de hoek tussen de lijnen  $l : 2x - y = 10$  en  $m : x - 4y = 12$  in hele graden nauwkeurig.

### Opgave 19

Staan de lijnen  $p : -30x + 20y = 33$  en  $q : 2x = 100 - 3y$  loodrecht op elkaar? Licht je antwoord toe.

### Opgave 20

Gegeven is het punt  $P(12,44)$  en de lijn  $l$  met vergelijking  $12x - 36y = 720$ . De lijn door  $P$  loodrecht op  $l$  snijdt  $l$  in punt  $Q$ . Stel een vergelijking op voor deze lijn en bereken daarmee de lengte van het lijnstuk  $PQ$ .

## Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het berekenen van de richtingscoëfficiënt van een lijn door twee punten en een lijn loodrecht daarop**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

**Werk met AlgebraKIT.**



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

