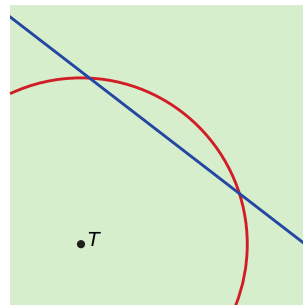


1.4 Snijden

Inleiding

Stel je een uitgestrekt en nogal leeg gebied voor met daarin een rechte weg. Je wilt telefoneren want je weet niet of je de goede kant op rijdt. Maar telefoonmasten hebben een beperkt bereik, bij T staat er één met een bereik van 30 km. Tussen welke punten op de weg kun je bellen? Het gaat dus om de snijpunten van een lijn en een cirkel. Bij het berekenen van snijpunten kun je de analytische aanpak van meetkundige problemen goed gebruiken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het snijpunt berekenen van twee lijnen;
- snijpunten berekenen van een lijn en een cirkel;
- snijpunten berekenen van twee cirkels.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van (rechte en kromme) lijnen in het platte vlak;
- systematisch lineaire en kwadratische vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Kies het assenstelsel en de eenheden zo dat de cirkel middelpunt $O(0,0)$ en een straal van 5 cm heeft. De lijn gaat door de punten $(0,5)$ en $(10,0)$.

Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de cirkel en bepaal de lengte van het stuk lijn binnen de cirkel.

Uitleg 1

Je wilt het snijpunt van de lijnen $l : x + 2y = 8$ en $m : 3x - 4y = 12$ berekenen. Daarvoor bestaan meerdere methodes:

- Methode I (één variabele vrijmaken en gelijkstellen): je herleidt beide vergelijkingen tot de vorm $y = ax + b$. Je stelt beide uitdrukkingen in x aan elkaar gelijk. Je lost de vergelijking op. Je berekent y .
- Methode II (substitutiemethode): je kiest een vergelijking en herleidt deze tot $x = \dots$ of $y = \dots$. Bijvoorbeeld herleid je $x + 2y = 8$ tot $x = 8 - 2y$. Je vult dit in de andere vergelijking in: $3(8 - 2y) - 4y = 12$. Je lost deze vergelijking op. Je vult de uitkomst in de andere vergelijking in en vindt daarmee de andere variabele.
- Methode III (balansmethode): je kunt ook beide vergelijkingen optellen of aftrekken links en rechts van het isgelijktteken. Maar daar heb je alleen wat aan als of de x of de y als variabele wegvalt. Door in de eerste vergelijking links en rechts met 2 te vermenigvuldigen, wordt:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases} \text{ omgezet naar: } \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$$

Tel nu beide vergelijkingen links en rechts van het isgelijktteken op. Je krijgt: $5x = 28$ en dus $x = 5,6$. De bijbehorende y -waarde vind je uit $5,6 + 2y = 8$.

Dit zijn drie methodes om een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op te lossen.

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**. Het is nuttig om alle drie de oplossingsmethodes goed te beheersen, soms is de ene dan weer de andere methode handiger.

- Bereken de snijpunten van de lijnen l en m met behulp van de eerste methode. Doe dit algebraïsch.
- Bereken de snijpunten van l en m ook met de tweede methode.
- En werk ten slotte de derde methode nog een keer door.

Opgave 2

Bereken het snijpunt van l en m in de volgende gevallen.

- $l : 2x - 3y = 6$ en $m : x + 4y = 10$
- $l : 4x + 12 = 0$ en $m : 5x + 2y = 20$

Opgave 3

Welke van de drie methodes werkt het beste als je het snijpunt van de lijnen $p : 5x - 3y = 15$ en $q : 2x - 6y = 11$ wilt berekenen? Bereken dit snijpunt.

Opgave 4

Bereken het snijpunt van $l : 2x + 3y = 6$ en $m : y = 4 - \frac{2}{3}x$. Wat gaat er mis en hoe kun je dit verklaren?

Opgave 5

Het snijpunt van twee lijnen bereken je door het stelsel van lineaire vergelijkingen op te lossen.

- Hoeveel snijpunten hebben de lijnen $x + 2y = 6$ en $2x + 4y = 10$?
- Hoeveel snijpunten hebben de lijnen $x + 2y = 6$ en $2x + 4y = 12$?

Uitleg 2**Bekijk de applet**

Stel je wilt de (eventuele) snijpunten van een cirkel met een lijn berekenen. Je ziet een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en een straal van 5 en een lijn door $(0,4)$ en door $(8,0)$. Om de snijpunten P en Q te berekenen, stel je eerst de vergelijkingen van de lijn en de cirkel op:

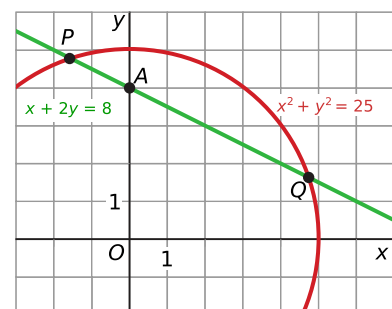
- cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$
- lijn $l : x + 2y = 8$

Dit stelsel los je op met de substitutiemethode. Dat kan door de vergelijking van de lijn (die is lineair) te herleiden naar de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$. Bijvoorbeeld: $x = -2y + 8$. Vervolgens vul je dit in de cirkelvergelijking in: $(-2y + 8)^2 + y^2 = 25$.

Haakjes wegwerken geeft: $5y^2 - 32y + 39 = 0$.

Oplossingen: $y \approx 1,64$ v $y \approx 4,76$ (met de abc-formule of met de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig).

De snijpunten zijn: $P(-1,52; 4,76)$ en $Q(4,72; 1,64)$.



Figuur 2

Opgave 6

In **Uitleg 2** zie je hoe je snijpunten van een lijn en een cirkel berekent. Bereken op dezelfde manier een snijpunt van de cirkel c met de lijn $m : 2x - y = 4$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 7

Hoeveel gemeenschappelijke punten kunnen een lijn en een cirkel hebben?

Opgave 8

Bereken het snijpunt van $k : y = -0,75x + 6,25$ met de cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **snijpunten** van twee lijnen, een lijn en een cirkel, of twee cirkels, zijn de punten die op beide lijnen en/of cirkels liggen. Je berekent ze door het bijbehorende **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** op te lossen:

- Het snijpunt van twee rechte lijnen kun je berekenen door een van beide te herleiden tot de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$. Je vult dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking in. Maar soms werkt de balansmethode beter: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar op of trekt ze van elkaar af, waarbij je ervoor zorgt dat een van de variabelen wegvalt.
- De snijpunten van een rechte lijn met een cirkel kun je berekenen door de vergelijking van de lijn te herleiden tot de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$. Je substitueert dan de gevonden uitdrukking in de vergelijking van de cirkel.
- De snijpunten van twee cirkels bereken je door in beide vergelijkingen de haakjes weg te werken en dan met behulp van de balansmethode alle kwadraten te laten wegvallen. Je houdt dan een lineair verband over in de vorm $x = \dots$ of $y = \dots$ dat je in een van beide cirkelvergelijkingen invult.

Zijn er geen oplossingen, dan spreek je van een **strijdig stelsel**. Je hebt dan bijvoorbeeld te maken met twee evenwijdige rechte lijnen of twee cirkels die elkaar niet snijden.

Beschrijven de twee vergelijkingen dezelfde lijn of dezelfde cirkel, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. Dan is sprake van een **afhankelijk stelsel**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Bekijk de figuur. Je ziet de twee rechten $l : 2x - y = 2$ en $m : x + 3y = 4$.

Bereken het snijpunt.

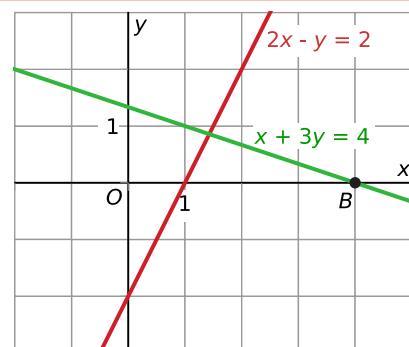
m is een rechte uit de familie $m_p : x + py = 4$. Door parameter p te variëren kun je ervoor zorgen dat l en m_p geen snijpunt hebben. Voor welke waarde van p is dit het geval?

Antwoord

Schrijf de vergelijking van l als $y = 2x - 2$. Vul dit in de vergelijking van m in: $x + 3(2x - 2) = 4$. Dit geeft $x = \frac{10}{7}$ en

$$y = 2 \cdot \frac{10}{7} - 2 = \frac{6}{7}.$$

Het snijpunt is $\left(\frac{10}{7}, \frac{6}{7}\right)$.



Figuur 3

Nu wil je p berekenen als l en m_p geen snijpunt hebben. Weer schrijf je de vergelijking van l als $y = 2x - 2$.

Vul dit in de vergelijking van m_p in: $x + p(2x - 2) = 4$.

Dit geeft: $(1 + 2p)x = 4 + 2p$.

Deze laatste vergelijking heeft geen oplossingen als $1 + 2p = 0$.

Dus alleen voor $p = -0,5$ hebben l en m_p geen snijpunt.

Een andere methode is de volgende: schrijf beide vergelijkingen van de lijnen in de vorm $y = \dots$, je krijgt $l : y = 2x - 2$ en $m_p : y = -\frac{1}{p}x + \frac{4}{p}$.

De lijnen snijden elkaar niet als ze evenwijdig lopen, de richtingscoëfficiënten moeten dus hetzelfde zijn. Er moet dan gelden $2 = -\frac{1}{p}$ en dit geeft $p = -0,5$.

Opgave 9

In **Voorbeeld 1** wordt het snijpunt van l en m berekend door substitutie. Daarbij wordt de vergelijking van l herleid naar $y = \dots$. Voer deze berekening nog eens uit, maar nu door de vergelijking van m te herschrijven en dan in te vullen.

Opgave 10

Bereken het snijpunt van l en m in **Voorbeeld 1** met de balansmethode.

Opgave 11

Bereken het snijpunt van l en m in de volgende gevallen.

- a $l : 2x - 3y = 6$ en $m : x + 4y = 10$
- b $l : 4y = -12$ en $m : 5x + 2y = 20$

Opgave 12

Kijk nog eens naar **Voorbeeld 1**.

- a Laat zien dat de waarde van p waarvoor beide lijnen evenwijdig zijn, inderdaad betekent dat beide lijnen dezelfde richtingscoëfficiënt hebben.
- b Gegeven zijn de lijnen $l : x + 5y = 12$ en $m_p : px - y = 4$. Voor welke waarde van p hebben deze lijnen geen snijpunt?

Voorbeeld 2

Bereken de snijpunten van de volgende cirkels:

$$c_1 : x^2 + y^2 = 25 \text{ en } c_2 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Antwoord

Het beste kun je nu in de vergelijking van c_2 de haakjes wegwerken:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = -4.$$

Vervolgens pas je de balansmethode toe op het stelsel:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = -4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Je ziet dat door de beide linkerzijden en de beide rechterzijden van elkaar af te trekken, er een lineaire vergelijking overblijft:

$$-4x - 6y = -29 \text{ ofwel: } x = -1,5y + 7,25.$$

Dit vul je in een van beide cirkelvergelijkingen in: $(-1,5y + 7,25)^2 + y^2 = 25$.

Hieruit bereken je de twee y -waarden van de snijpunten.

De twee x -waarden vind je met $x = -1,5y + 7,25$.

Opgave 13

Voer de berekening van **Voorbeeld 2** zelf uit. Rond je antwoord af op één decimaal.

Opgave 14

Bereken de snijpunten van de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 25$ en $c_2 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$. Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.

Verwerken**Opgave 15**

Bereken (waar nodig in twee decimalen nauwkeurig) de snijpunten.

- a lijn $l : x + y = 6$ met cirkel $c_1 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$.
- b lijn $m : 5x - 2y = 10$ met lijn $k : 2x = 12 - 3y$.
- c cirkel $c_1 : x^2 + y^2 = 6$ met cirkel $c_2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

Opgave 16

Bereken de snijpunten van de cirkel $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$ met de gegeven lijnen.

- a de x -as.
- b de y -as.
- c de lijn $k : x + y = 1$ (in twee decimalen nauwkeurig).

Opgave 17

Bereken hoeveel punten de cirkel $c : (x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 52$ en de lijn $l : 12x + 8y = 24$ met elkaar gemeen hebben.

Opgave 18

Voor welke waarde van a hebben de lijnen $ax + 4y = 10$ en $2x = y + 6$ geen snijpunt?

Opgave 19

Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + (y - 2)^2 = 9$ en $c_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 9$. Lijn l gaat door de middelpunten van beide cirkels.

- a Bereken de snijpunten van c_1 met c_2 in twee decimalen nauwkeurig.
- b Bereken de snijpunten van c_1 met de x - en y -as.
- c Bereken de snijpunten van c_1 met l in twee decimalen nauwkeurig.
- d Lijn l heeft in totaal vier snijpunten met beide cirkels. Wat is de grootste afstand tussen twee van die snijpunten in één decimaal nauwkeurig?

Opgave 20

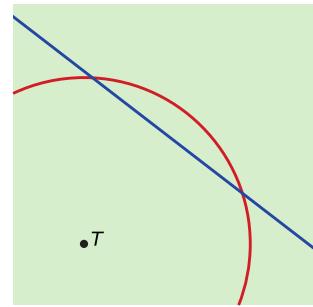
Als je in een cirkel twee lijnen trekt die allebei door het middelpunt M van de cirkel gaan, dan vormen de vier snijpunten van die lijnen met de cirkel een rechthoek. Deze stelling kun je met analytische meetkunde bewijzen.

- a In een assenstelsel is $O(0,0)$ het middelpunt van de cirkel en het punt $(1,0)$ een punt op de cirkel. Welke vergelijking heeft de cirkel dan?
- b De ene lijn door het middelpunt van de cirkel is bijvoorbeeld de x -as, de andere is dan $y = ax$. Welke vier snijpunten met de cirkel vind je dan?
- c Waarom vormen deze vier punten een rechthoek?
- d Kun je ook een bewijs geven zonder analytische meetkunde?

Toepassen

Opgave 21: Mobiele telefonie

Mobiele telefoons hebben soms 'geen bereik'. Dat betekent dat er geen mast voor telecommunicatie in de buurt is waarmee je mobiele telefoon in verbinding kan staan. Stel je voor dat zo'n telefoon een bereik heeft van dertig kilometer. Op vijftien kilometer van de snelweg A1 staat zo'n mast voor telecommunicatie. Gedurende hoeveel kilometer kun je rijdend op de A1 via die mast verbinding maken met je mobiele telefoon? Ga uit van een recht stuk snelweg. Probeer dit met analytische meetkunde op te lossen.



Figuur 4

Opgave 22: Gelijkzijdige driehoek

Met een passer kun je gemakkelijk een gelijkzijdige driehoek construeren. Kies twee punten A en B en omcirkel AB vanuit punt A en daarna vanuit punt B . Markeer vervolgens één van de twee snijpunten van die cirkels als punt C . $\triangle ABC$ is dan de gewenste gelijkzijdige driehoek. Neem een cartesisch assenstelsel met $A(-a,0)$ en $B(a,0)$ en $a > 0$.

- Cirkel c_1 heeft middelpunt A en straal AB . Stel een vergelijking voor c_1 op.
- Cirkel c_2 heeft middelpunt B en straal AB . Stel een vergelijking voor c_2 op.
- Bereken de snijpunten van c_1 en c_2 .
- Noem één van beide snijpunten C en laat met behulp van de coördinaten van A , B en C zien dat de afstanden tussen deze drie punten even groot zijn.

Testen

Opgave 23

Bereken algebraïsch de snijpunten.

- Lijn $l : x + 4y = 12$ met lijn $m : 2x - 3y = -20$.
- Lijn $l : x + 4y = 12$ met cirkel $c : (x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 34$.
- De cirkel $c : (x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 34$ met de cirkel $k : x^2 + (y + 3)^2 = 13$.

Opgave 24

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(2,1)$ en straal 4 en lijn l die door de punten $(0,3)$ en $(5,0)$ gaat. Bereken de afstand tussen de snijpunten van l en c in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 25

Voor welke waarde van p hebben de lijnen $2x + 7y = 28$ en $px - y = 15$ geen snijpunt?

Practicum: GeoGebra IV

Je kunt GeoGebra heel goed gebruiken om rechten en krommen met een gegeven vergelijking in beeld te brengen. Je ziet dan meteen of er snijpunten zijn. En met GeoGebra kun je gemakkelijk snijpunten van twee (rechte of kromme) lijnen in de figuur aangeven. Door vervolgens met de rechter muisknop bij de eigenschappen van het snijpunt het label aan te zetten en te kiezen voor 'Naam en waarde', krijgt het snijpunt een naam en kun je er de coördinaten gemakkelijk van aflezen. Op deze manier kun je gemakkelijk antwoorden controleren...



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
