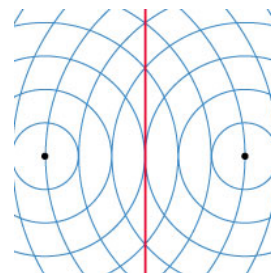


1.3 Cirkels

Inleiding

Je hebt gezien hoe je rechte lijnen weer kunt geven met vergelijkingen in x en y . Maar hoe zit het nu met cirkels, parabolen en andere kromme lijnen? Je zult ontdekken hoe je ook cirkels kunt beschrijven met behulp van vergelijkingen. Maar het werken met vergelijkingen kan nog veel algemener worden toegepast: veel kromme lijnen kunnen door vergelijkingen worden beschreven...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- hoe je een cirkel kunt beschrijven met een vergelijking in x en y ;
- berekenen of punten op, binnen of buiten een gegeven cirkel liggen;
- bij een gegeven cirkelvergelijking de cirkel tekenen.

Voorkennis

- werken met het begrip richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van een rechte lijn;
- werken met cartesische coördinaten;
- de afstand tussen twee gegeven punten berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt al kennis gemaakt met vergelijkingen van lijnen. Je weet dat die de vorm $ax + by = c$ hebben. Benoem de verzameling van alle punten $P(x, y)$ die voldoen aan de genoemde vergelijkingen. Laat bijvoorbeeld GeoGebra de figuren maken door de vergelijkingen in te voeren, zie [Practicum](#).

- a $y = 2x + 6$
- b $x^2 + y^2 = 25$
- c $x^2 = 4$
- d $y = 25 - x^2$

Uitleg

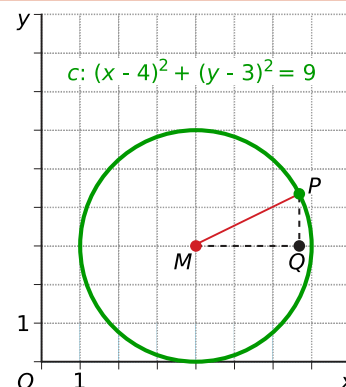
Bekijk de applet

Een cirkel in de meetkunde bestaat uit alle punten die even ver van het middelpunt liggen. Je ziet cirkel c met middelpunt $M(4,3)$ en straal 3 in een cartesisch coördinatenstelsel.

Het bijzondere van alle punten op deze cirkel is, dat ze op afstand 3 van M liggen. Punten die niet op de cirkel liggen, hebben een andere afstand tot M .

Voor alle punten P op de cirkel geldt dus $|MP| = 3$.

$|MP|$ kun je in een cartesisch coördinatenstelsel met de stelling van Pythagoras berekenen: $|MQ|^2 + |QP|^2 = |MP|^2$.



Figuur 2

Noem nu de coördinaten van $P(x,y)$. Bekijk de figuur en controleer dat, afhankelijk van de plek van P op de cirkel, geldt:

- $|MQ| = x - 4$ of $|MQ| = 4 - x$
- $|QP| = y - 3$ of $|QP| = 3 - y$

Een vergelijking van een cirkel met $M(4,3)$ en straal 3 ontstaat door dit in te vullen $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$.

Opmerking: punt M ligt zelf dus niet op de cirkel.

Opgave 1

Gegeven is de volgende formule voor een cirkel: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

- Controleer of de punten $(1,3)$, $(4,0)$, $(7,3)$ en $(4,6)$ inderdaad voldoen aan de gevonden formule voor de cirkel.
- Hoe kun je nagaan of het punt $P(6,5)$ binnen of buiten de gegeven cirkel ligt? (Denk eraan dat alleen tekenen geen bewijs is.)

Opgave 2

Teken zo nodig de volgende cirkels in een cartesisch assenstelsel.

- Welke vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 5?
- Welke vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $M(3,1)$ en straal 2?
- Een cirkel heeft middelpunt $M(4, -1)$ en straal 5. Welke vergelijking heeft deze cirkel?

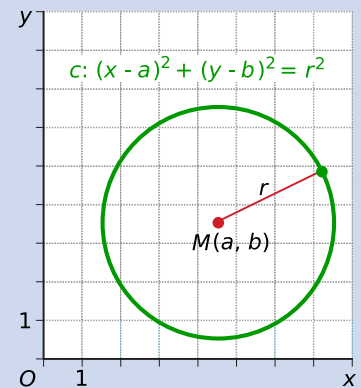
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

De **vergelijking van een cirkel** in een cartesisch assenstelsel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r is $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Bij een vergelijking in x en y die niet in deze vorm te schrijven is, hoort geen cirkel.



Figuur 3

Voorbeeld 1[Bekijk de applet](#)

Teken in een cartesisch assenstelsel de cirkel met vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Antwoord

Het middelpunt van de cirkel lees je uit de vergelijking af: $M(4,2)$.

Voor de straal r geldt: $r^2 = 16$ en dus $r = \sqrt{16} = 4$.

Teken punt $M(4,2)$ en maak met de passer een cirkel met M als middelpunt en straal 4.

Opgave 3

In [Voorbeeld 1](#) zie je de vergelijking van een cirkel.

Bekijk die cirkel in het assenstelsel. Bepaal alle roosterpunten op de cirkel.

Opgave 4

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de cirkel met de volgende vergelijking: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Voorbeeld 2[Bekijk de applet](#)

Teken in een cartesisch assenstelsel de cirkel met vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

Antwoord

Het middelpunt van de cirkel lees je uit de vergelijking af: $M(4,2)$.

Voor de straal r geldt: $r^2 = 10$ en dus $r = \sqrt{10} \approx 3,16$.

Dit getal is een benadering. In dit geval kun je echter een roosterpunt op de cirkel vinden door in te zien dat $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2+1^2}$. Alle punten die 3 rechts of links van M en tegelijk 1 onder of boven M liggen, zijn roosterpunten van de cirkel. Bijvoorbeeld $(4 + 3, 2 + 1) = (7, 3)$. Dit kun je goed gebruiken om de cirkel te tekenen.

Opgave 5

In [Voorbeeld 1](#) zie je de vergelijking van een cirkel.

Bekijk de cirkel in het assenstelsel. Bepaal alle roosterpunten op de cirkel.

Opgave 6

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de cirkel met vergelijking $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13$. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Opgave 7

Waarom liggen op de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 7$ geen roosterpunten?

Voorbeeld 3**Bekijk de applet**

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(-1,3)$ die gaat door het punt $P(1,2)$.

Antwoord

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal c is: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Omdat $M = (-1,3)$, wordt dit $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$.

P invullen geeft: $(1 + 1)^2 + (2 - 3)^2 = r^2$. Dus $r^2 = 5$.

De gevraagde vergelijking wordt $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Opgave 8

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3,4)$ die gaat door punt $P(-1,7)$. Laat zien dat deze cirkel ook door de oorsprong $O(0,0)$ gaat.

Opgave 9

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(-10,25)$ die gaat door punt $A(-4,21)$. Onderzoek of deze cirkel ook door $B(-5,20)$ gaat.

Verwerken**Opgave 10**

Stel de vergelijking van de cirkels op.

- a Met middelpunt $M(1,2)$ en straal 3.
- b Met middelpunt $M(-2,3)$ en straal 2,5.
- c Met middelpunt $M(4, -5)$ door $P(8,10)$.
- d Met middelpunt $M(-2, -6)$ door $P(3,3)$.

Opgave 11

Gegeven is een cirkel in een cartesisch assenstelsel die aan de vergelijking $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 17$ voldoet. Bepaal alle roosterpunten die op de cirkel liggen

Opgave 12

In een cartesisch assenstelsel zijn de drie punten $A(2,0)$, $B(7,3)$ en $C(0,5)$ gegeven.

- a Stel een vergelijking op van de cirkel door C met middelpunt A .
- b Stel een vergelijking op van de cirkel door B en C waarvan het middelpunt op lijnstuk BC ligt. Onderzoek of deze cirkel ook door A gaat.

Opgave 13

Gegeven zijn de punten $P(0,4)$ en $Q(4,0)$ in een cartesisch assenstelsel Oxy .

- a Welk middelpunt heeft de cirkel die door de oorsprong O en door P en Q gaat?
- b Stel de vergelijking van deze cirkel op en teken de cirkel.
- c Hoeveel roosterpunten liggen op of binnen deze cirkel?

Opgave 14

De lijn met vergelijking $2x + 3y = 6$ snijdt de x - en y -as in de punten A en B . Er gaat een cirkel door deze twee punten met als middelpunt het midden van lijnstuk AB .
Stel een vergelijking van deze cirkel op.

Toepassen**Opgave 15: Stelling van Thales**

Door de drie hoekpunten van een rechthoekige driehoek kun je altijd een cirkel tekenen waarvan het middelpunt op de schuine zijde ligt. Thales van Milete merkte dit als eerste op (omstreeks 600 voor Christus).

- a Kun je met behulp van eenvoudige meetkunde laten zien dat dit voor elke rechthoekige driehoek geldt?
- b Neem een rechthoekige driehoek met rechthoekzijden van a cm en b cm. Kies een cartesisch assenstelsel Oxy zo, dat O het hoekpunt met de rechte hoek is en de rechthoekzijden langs de assen liggen. Toon met een berekening aan dat deze rechthoekige driehoek de genoemde eigenschap heeft.

Opgave 16: GPS-ontvanger

Een GPS-ontvanger meet hoever verschillende satellieten van je vandaan zijn door hun signalen op te vangen. Door deze afstanden te combineren, wordt je positie bepaald. Veronderstel dat elke satelliet het afstandssignaal in een cirkelvorm uitzendt.

- a Hoeveel satellieten heb je minimaal nodig om je positie vast te stellen?
- b Met de volgende drie cirkelvergelijkingen wordt je positie (het snijpunt van de drie cirkels) bepaald. Teken de drie cirkels in een cartesisch assenstelsel en geef de coördinaten van je positie.

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 13$$

$$(x - 5)^2 + y^2 = 10$$

Testen**Opgave 17**

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$.

- a Bepaal het middelpunt en de straal van deze cirkel en teken de cirkel in een Oxy -assenstelsel.
- b Toon aan dat $A(5,1)$ op deze cirkel ligt.
- c Toon aan dat $B(1,3)$ buiten cirkel c ligt.

Opgave 18

Stel een vergelijking op van de cirkel door de punten $A(1,0)$ en $B(5,0)$ waarvan het middelpunt op de lijn $y = 4$ ligt. Bepaal alle roosterpunten op deze cirkel.

Practicum: GeoGebra III

Je hebt nu hopelijk een aantal keren met GeoGebra gewerkt (loop anders GeoGebra I en II nog een keer door).

In GeoGebra kun je eenvoudig **vergelijkingen invoeren**. Dat doe je in de invoerbalk onderaan het venster. Je typt de formule gewoon in het vak achter de knop invoer en [ENTER]. Het sterretje * is het vermenigvuldigingsteken. De lijnen die je in dit onderdeel tegenkomt kun je zelf eenvoudig maken, gebruik eventueel de helpfunctie via het menu 'Help'; hij is vrij duidelijk en uitgebreid.


**Figuur 4**

Een vergelijking met een **parameter** kan ook. Je voert dan eerst een waarde voor de parameter in, bijvoorbeeld $p = 2$ en dan $b = 1$ en $c = 6$. Vervolgens voer je een vergelijking in x en y in waar deze parameter in voorkomt. (Ook nu kan niet alles, maar wel veel...) Je kunt de parameter als schuifbalk zichtbaar maken door in het algebravenster met de rechter muisknop op de parameter te klikken en 'object tonen' te kiezen.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
