

1.1 Coördinaten in het vlak

Inleiding

In de zestiende eeuw maakte de wiskunde door René Descartes een enorme sprong. Voor het eerst gebruikte Descartes systematisch assenstelsels om meetkundige problemen te beschrijven. Zo worden meetkundige figuren met getallen en variabelen beschreven. Om Descartes te blijven herinneren is het coördinatenstelsel dat geschikt is voor het werken met meetkundige objecten, een cartesisch coördinatenstelsel genoemd.

Je leert in dit onderwerp

- werken met een cartesisch coördinatenstelsel is;
- de afstand tussen twee punten berekenen;
- de coördinaten van het midden tussen twee punten berekenen.

Voorkennis

- werken met coördinaten;
- meetkundige begrippen zoals loodrecht, evenwijdig, hoek en afstand gebruiken.

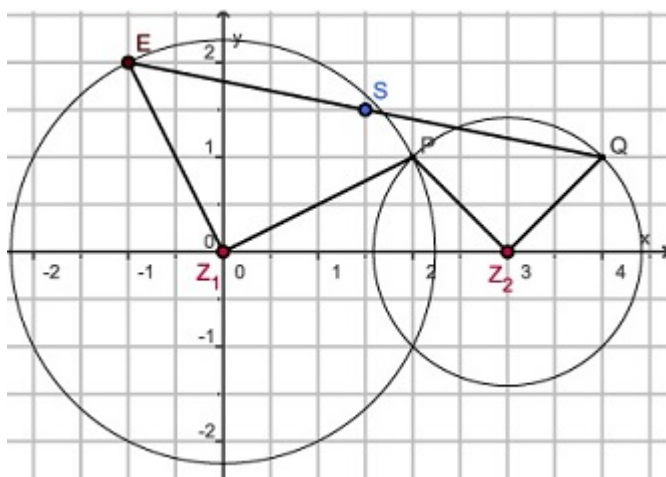
Verkennen

Opgave V1

Op een eiland is een schat begraven. De volgende aanwijzingen moeten je bij de schat brengen:

“Ga in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwervkei. Loop vervolgens dezelfde afstand, in een lijn loodrecht op de vorige richting. Loop vanaf het punt waar je bent gekomen in een rechte lijn naar de tweede zwervkei en vervolg je route in de richting loodrecht op het laatst gelopen stuk, even ver als dit stuk. Ga tenslotte in een rechte lijn terug naar de oude eik. Halverwege zul je de schat aantreffen.”

Bekijk de applet: schatgraversprobleem



Figuur 1

Er is echter een probleem: de oude eik is totaal verdwenen.

Eerst een schets van de situatie: Z_1 en Z_2 zijn de zwerfkeien, die punten liggen vast. De oude eik wordt zo maar ergens een punt, de rest construeer je. Bij Z_1 en Z_2 maak je rechte hoeken, de cirkels zijn nodig om gelijke afstanden op de goede plek te krijgen. Kijk eens wat er gebeurt als je de oude eik verplaatst.

Is de plaats van de oude eik belangrijk voor de positie van de schat?

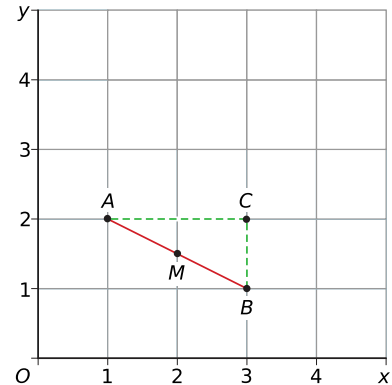
Uitleg

Bekijk de applet

Meetkundige problemen gaan over punten, lijnen en lijnstukken, hoeken, afstanden en dergelijke. Dat zijn zaken die zich goed laten aanpakken met behulp van coördinaten. Vandaar dat in de meetkunde het cartesisch coördinatenstelsel Oxy wordt gebruikt: twee onderling loodrechte assen met daarop dezelfde schaalverdeling.

Bekijk het cartesisch coördinatenstelsel met de punten A en B . Door de manier waarop het assenstelsel is gekozen, heeft A de coördinaten $(1,2)$ en is $B(3,1)$.

De afstand van A tot B is de lengte van lijnstuk AB . De lengte van lijnstuk AB noteer je als $|AB|$. Je berekent de lengte AB door in $\triangle ABC$ de stelling van Pythagoras toe te passen. De lengte van lijnstuk AC vind je door de x -coördinaten van A en C van elkaar



Figuur 2

af te trekken. De lengte van lijnstuk CB vind je door de y -coördinaten van B en C van elkaar af te trekken. De lengte van lijnstuk AB is gelijk aan $|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$.

De coördinaten van M , het midden van AB , bereken je als volgt: De x -coördinaat van M is het gemiddelde van de x -coördinaten van A en B . De y -coördinaat van M is het gemiddelde van de y -coördinaten van A en B . Dus M is $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(2, 1\frac{1}{2}\right)$.

Opgave 1

Je weet nu wat een cartesisch coördinatenstelsel is.

- Waarom is het in de meetkunde van belang dat beide assen loodrecht op elkaar staan en dezelfde schaalverdeling hebben?
- Teken een cartesisch coördinatenstelsel met punten $A(1,3)$ en $B(4,1)$ en bereken de lengte van lijnstuk AB .
- Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .

Opgave 2

Gegeven zijn in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(-1,3)$ en $B(1,4)$.

- Bereken de lengte van lijnstuk AB .
- Bereken de coördinaten van het midden M van AB .

Opgave 3

Gegeven zijn de punten $A(-10,33)$ en $B(20,-45)$ in een coördinatenstelsel waarvan de assen loodrecht op elkaar staan en de schaalverdelingen op de assen gelijk zijn.

- Bereken de lengte van lijnstuk AB .
- Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .

Opgave 4

Ga uit van $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$.

- Druk de lengte van lijnstuk AB uit in x en y .
- Druk de coördinaten van punt M uit in x en y .

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Meetkunde kun je door een slimme keuze van een assenstelsel omzetten in berekeningen met coördinaten.

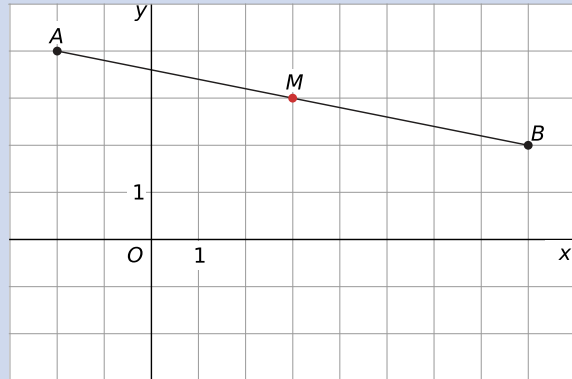
Een **cartesisch assenstelsel** is een Oxy -assenstelsel waarvan de x -as en de y -as loodrecht op elkaar staan en waarvan de assen dezelfde lineaire schaalverdeling hebben.

Een cartesisch assenstelsel zet gelijke maten (lengten, hoeken) om naar gelijke getallen en ongelijke maten naar ongelijke getallen.

Het **midden** M van lijnstuk AB kan bijvoorbeeld op deze manier worden bepaald: Als door de keuze van het cartesische coördinatenstelsel A gelijk is aan (x_A, y_A) en B aan (x_B, y_B) , geldt: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

De **lengte van lijnstuk** AB schrijf je als $|AB|$. Met de stelling van Pythagoras geldt in een cartesisch coördinatenstelsel: $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

De 'omgekeerde stelling van Pythagoras' is: als in een driehoek geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is die driehoek rechthoekig.



Figuur 3

Voorbeeld 1

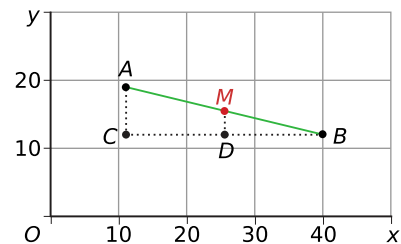
Bekijk de applet

Je ziet de punten $A(11, 19)$, $B(40, 12)$ en $C(11, 12)$.

M is het midden van lijnstuk AB en $MD \parallel AC$.

Gebruik gelijkvormigheid en laat zien dat $x_M = 25\frac{1}{2}$ en $y_M = 15\frac{1}{2}$.

Bereken ook de coördinaten van M met de formule uit de theorie en laat zien dat je dezelfde coördinaten vindt.



Figuur 4

Antwoord

Bekijk de twee driehoeken CBA en DBM . De overeenkomende paren hoeken van deze driehoeken zijn even groot, dus de driehoeken zijn gelijkvormig. Omdat $|AM| = |MB|$ geldt ook $|CD| = |DB|$.

Omdat $|CB| = 40 - 11 = 29$, is $|CD| = \frac{1}{2} \cdot 29 = 14\frac{1}{2}$.

Dus is $x_M = x_A + 14\frac{1}{2} = 11 + 14\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$.

Op dezelfde manier laat je zien dat $y_M = 15\frac{1}{2}$. Dus $M\left(25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2}\right)$.

Met de formule: $M\left(\frac{40+11}{2}, \frac{12+19}{2}\right)$ en dus $M\left(25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2}\right)$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** vind je voor het midden van AB het punt $M = (25\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2})$.

Je hebt met behulp van de figuur laten zien dat $x_M = 25\frac{1}{2}$.

- Teken zelf een figuur om y_M uit te rekenen.
- Laat met behulp van de figuur zien dat $y_M = 15\frac{1}{2}$.

Opgave 6

Gegeven zijn de punten de punten $A(2,8)$ en $B(10,14)$.

Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .

Voorbeeld 2

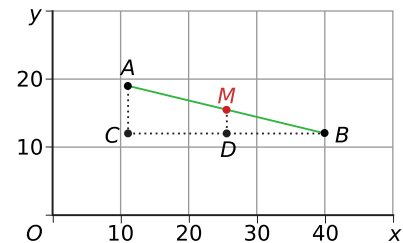
[Bekijk de applet](#)

Je ziet de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$. Bereken de lengte van AB met de formule $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Toon aan dat je uitkomst klopt.

Antwoord

$$|AB| = \sqrt{(40 - 11)^2 + (12 - 19)^2} = \sqrt{890}$$

Je kunt aantonen dat dit klopt door een rechthoekige driehoek CBA te maken en daarop de stelling van Pythagoras toe te passen.



Figuur 5

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zijn de punten $A(11,19)$ en $B(40,12)$ gegeven.

- Laat met behulp van de stelling van Pythagoras zien dat de formule voor de lengte van lijnstuk AB klopt.
- Neem nu $C(-1,3)$ en $D(5,-10)$. Bereken $|CD|$ met de formule voor de lengte en laat met een tekening zien dat dit inderdaad de juiste lengte oplevert.

Opgave 8

Teken in een cartesisch assenstelsel Oxy de punten $A(-3,6)$, $B(6,0)$ en $C(18,18)$.

- Bereken de lengtes van de lijnstukken AB , BC en AC .
- Bewijs dat driehoek ABC rechthoekig is.
- Noem het midden van AB punt D , het midden van BC punt E , en het midden van AC punt F . Bereken de coördinaten van de hoekpunten van driehoek DEF .
- Bewijs dat ook driehoek DEF rechthoekig is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: schatgraversprobleem

In de figuur is E variabel, Z_1 en Z_2 liggen vast. Gegeven: $|EZ_1| = |Z_1P|$ en $|PZ_2| = |Z_2Q|$ en de hoeken EZ_1P en PZ_2Q zijn recht. Gevraagd is aan te tonen dat het midden S van EQ niet van plaats kan veranderen, ook als punt E van plaats verandert.

Antwoord

Je ziet in de figuur de congruente (gelijke) driehoeken: $\triangle EAZ_1 \cong \triangle Z_1PB$ en $\triangle PBZ_2 \cong \triangle Z_2CQ$.

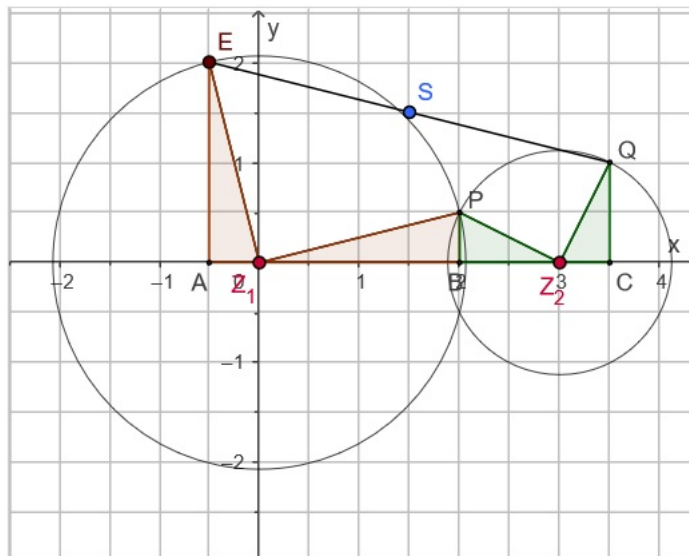
Neem voor het variabele punt $E(-x, y)$, dan is $|EA| = y$ en $|AZ_1| = x$. En dus is ook $|Z_1B| = y$ en $|BP| = x$.

$|BZ_2| = 3 - y$. Tenslotte is $|Z_2C| = |BP| = x$ en $|CQ| = |BZ_2| = 3 - y$.

De coördinaten van Q zijn daarom $(3 + x, 3 - y)$. Het midden van EQ is dus

$$S = \left(\frac{-x + 3 + x}{2}, \frac{y + 3 - y}{2} \right) = (1, 5; 1, 5).$$

Kennelijk is de plaats van S niet van x en y afhankelijk en dus ook niet van de positie van punt E .



Figuur 6

Opgave 9

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3**. Punt E kan van positie veranderen, maar de positie van punt S zou daardoor niet moeten veranderen.

- Neem $E(-1, 2)$ en toon door berekening aan dat de positie van het punt S niet verandert.
- Neem $E(-x, y)$ en toon zelf door berekening aan dat het punt S niet verandert.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven zijn de punten $A(-11, 23)$ en $B(106, 133)$.

- Bereken $|AB|$ en de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .
- B is het midden van lijnstuk AC . Bereken de coördinaten van C .

Opgave 11

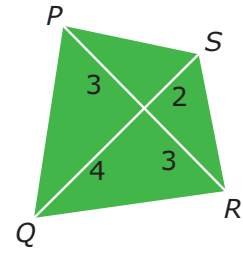
Teken de punten $A(6, 0)$, $B(10, 8)$, $C(6, 10)$ en $D(2, 2)$ in een cartesisch coördinatenstelsel.

- Toon met een berekening aan dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.
- Bepaal de coördinaten van het snijpunt S van de diagonalen van rechthoek $ABCD$.
- Bereken de oppervlakte van driehoek ABS .

Opgave 12

Ga uit van de vlieger $PQRS$. De middens van de zijden van deze vlieger $PQRS$ vormen een rechthoek (zoals dat bij elke vlieger het geval is). Dat kun je met behulp van analytische meetkunde aantonen.

- Teken een cartesisch assenstelsel met O op het snijpunt van de diagonalen van de vlieger. De assen kies je precies langs de diagonalen. Waarom kan dat eigenlijk?
- Nu zijn de hoekpunten $P(-3,0)$, $Q(0,-4)$, $R(3,0)$ en $S(0,2)$. Noem A midden PQ , B midden QR , C midden SR en D midden PS en bereken de coördinaten van A , B , C en D .
- Toon aan dat $ABCD$ een rechthoek is.

**Figuur 7****Opgave 13**

Gegeven zijn de lijnen $l : y = 5x + 3$, $m : y = 2\frac{1}{2}x - 12$ en $n : y = -2x + 6$.

Lijnen l en m snijden elkaar in punt A , en m en n snijden elkaar in punt B . Bereken $|AB|$ algebraïsch.

Opgave 14

Van een lijnstuk KL is het punt $K(2,8)$ gegeven en het midden $M(4,12)$.

- Bereken het eindpunt L .
- Bereken de lengte van het lijnstuk KL .
- Stel dat L het midden is van lijnstuk KP . Bereken de coördinaten van P .
- Het punt N ligt op $\frac{3}{4}$ van lijnstuk KP . Bereken de coördinaten van N .

Toepassen**Opgave 15: Schepen op zee**

Twee schepen varen op zee een onderling loodrechte koers. Die twee koersen kun je aangeven met lijnen die zich in S snijden. Het ene schip vaart met een snelheid van 20 km/h en is nog 80 km van S verwijderd. Het andere schip vaart met 10 km/h en is nog 60 km van S verwijderd. Hoe dicht zullen de schepen bij elkaar komen?

- De variabele t is de tijd in uren. Kies $t = 0$ op het moment van de beschreven situatie en maak een passende tekening met een geschikt assenstelsel. Zet de afstand tussen beide schepen in het assenstelsel.
- Neem nu $t = 1$ en teken de onderlinge afstand tussen beide schepen. Doe dit ook voor $t = 2$, $t = 3$ enzovoort.
- Hoe groot is de onderlinge afstand van de schepen op $t = 0$ (t in uren)?
- Hoe groot is die afstand op $t = 1$?
- Druk de onderlinge afstand a uit in t .
- Hoe groot is de kleinste onderlinge afstand tussen beide schepen?

Opgave 16: Zwaartelijnen in een gelijkbenige driehoek

Een gelijkbenige driehoek ABC heeft twee benen AC en BC van 5 cm en lijnstuk $AB = 6$ cm. Verbind het midden P van AC met B en het midden Q van BC met A . Je krijgt twee lijnstukken die elkaar snijden in punt S . Nu geldt $\frac{AS}{SQ} = \frac{BS}{SP} = \frac{2}{1}$.

Toon dit aan met behulp van een goed gekozen assenstelsel.

Testen

Opgave 17

Gegeven zijn de punten $P(-120, -35)$ en $Q(0, 12)$.

- Bereken de lengte van lijnstuk PQ in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken de afstand van het midden van lijnstuk PQ tot de oorsprong van het assenstelsel.

Opgave 18

Teken in een cartesisch coördinatenstelsel de punten $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ en $C(1, 6)$ en verbind de punten met elkaar.

- Toon aan dat driehoek ABC rechthoekig is.
- Verbind het midden P van AC met B . Toon aan dat $\triangle ABP$ een gelijkbenige driehoek is.

Practicum: GeoGebra I

Bij vlakke meetkunde kun je constructies uitvoeren m.b.v. **GeoGebra**. Je kunt dit (gratis) downloaden via www.geogebra.org. Installeer GeoGebra eerst of gebruik de app: "Meetkunde".

Met dit programma maak je constructies en applets zoals je die regelmatig in dit webmateriaal aantreft.

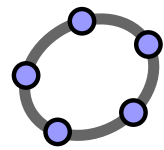
Bijvoorbeeld de applet bij het schatgraversprobleem bij Verkennen.

- Doe de [Lesbrief-GeoGebra-5](#).

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het berekenen van het midden en de afstand tussen twee punten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.



Figuur 8

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
