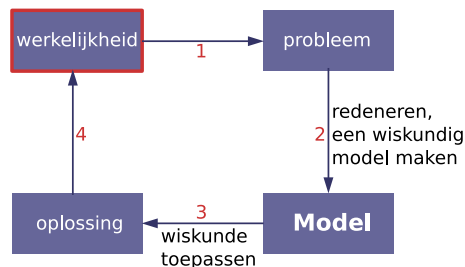


## 7.6 Toepassingen

### Inleiding

Een 'model' is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. In de wetenschap wordt veel met modellen gewerkt omdat de werkelijkheid te complex is om zonder meer te beschrijven. Door niet belangrijke details weg te laten (verstandige aannames te doen) kan een model worden opgesteld dat met wiskundige middelen is te beschrijven en door te rekenen. Uit het doorrekenen van het model worden conclusies getrokken die dan weer kunnen worden vergeleken met de realiteit. Bij het werken met modellen gaat het vaak om het berekenen van extremen, om 'optimaliseringsproblemen'. Daarbij wordt het differentiëren toegepast. En er zijn nog andere toepassingen van differentiëren...



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- werken met rekenmodellen waarin het differentiëren kan worden toegepast;
- optimaliseringsproblemen aanpakken.

### Voorkennis

- differentiëren met alle differentieerregels;
- werken met de afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen.

### Verkennen

#### Opgave V1

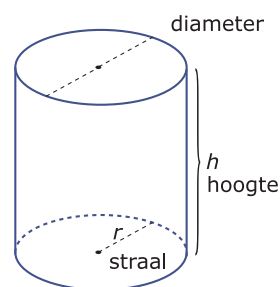
Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.

Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

### Uitleg

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag. Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Eerst een rekenmodel opstellen: Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn dan de straal van (het grondvlak van) het blik  $r$  en de hoogte  $h$ , neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik ( $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$ ), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn. Voor de inhoud van een cilinder geldt:  $I = \pi r^2 h$ . Voor de oppervlakte van een cilinder geldt:  $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$ . Ga dat na.



Figuur 2

Met  $I = 1000$  vind je  $\pi r^2 h = 1000$  en dus:  $h = \frac{1000}{\pi r^2}$ . Als je nu in de formule voor  $A$  deze uitdrukking invult voor  $h$ , dan vind je:  $A(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$ .

Met behulp van differentiëren of de grafische rekenmachine vind je, dat voor  $r \approx 5,4$  cm en  $h \approx 10,8$  cm de totale oppervlakte minimaal is.

### Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een globale uitwerking van het probleem van het cilindervormige literblik met een zo klein mogelijke oppervlakte.

- Welke aannames worden er gedaan?
- Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?
- Laat zien hoe je de formule voor  $A(r)$  kunt afleiden.
- Bepaal nu de afgeleide van  $A(r)$  en bereken met behulp daarvan de waarde van  $r$  waarvoor  $A(r)$  minimaal is.

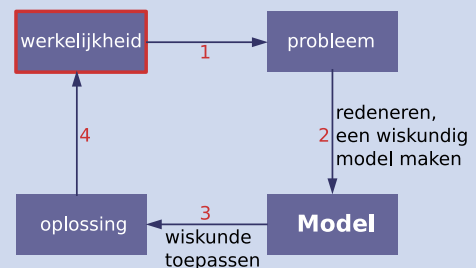
## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Wiskunde wordt veel toegepast in wetenschap en handel en industrie om problemen op te lossen. Daarmee wordt bedoeld dat bij een wetenschappelijk onderzoek, een nieuw te ontwikkelen technologie, een productieproces, en dergelijke vanuit de al bestaande praktijk een vraagstuk naar voren komt waar een antwoord op moet worden gevonden. Vaak heeft dat antwoord de vorm van een **wiskundig model**. Een wiskundig model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid op grond van verstandige aannames. In een goed model zijn alle belangrijke factoren nog aanwezig, alleen de onbelangrijke blijven buiten beschouwing. Meestal heeft het model de vorm van één of meer formules die beschrijven hoe de belangrijke variabelen zich gedragen. Op die formules wordt dan de geschikte wiskundige theorie losgelaten...

Meer hierover vind je bij de rubriek **Probleemaanpak** op de Math4allsite.

Bij **optimaliseren** gaat het om wiskundige modellen waarbij wordt gezocht naar een maximale of een minimale waarde. Vaak is dat het maximum of minimum van een functie. Je kunt dat vinden met behulp van differentiëren of met je grafische rekenmachine.

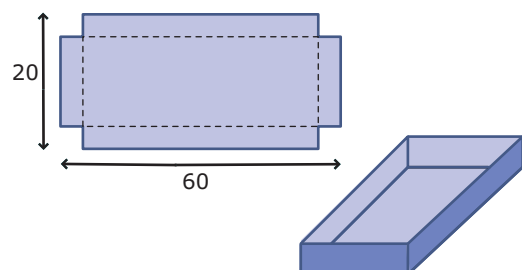


Figuur 3

### Voorbeeld 1

Uit een stuk karton van 20 bij 60 centimeter wordt een bakje gevouwen. Neem voor de hoogte van dit bakje  $x$  cm.

De inhoud  $I$  van dit bakje hangt alleen af van  $x$  (als er verder niets boven het open bovenvlak mag uitsteken). Bereken algebraïsch bij welke waarde van  $x$  de inhoud van het bakje maximaal is.



Figuur 4

Antwoord

$$I(x) = x(20 - 2x)(60 - 2x) = 1200x - 160x^2 + 4x^3$$

$$I'(x) = 12x^2 - 320x + 1200 = 0 \text{ geeft } x = \frac{80 \pm \sqrt{2800}}{6}.$$

Aan de grafiek van  $I$  zie je dat de inhoud maximaal is als  $x = \frac{80 - \sqrt{2800}}{6} \approx 4,5$  cm.

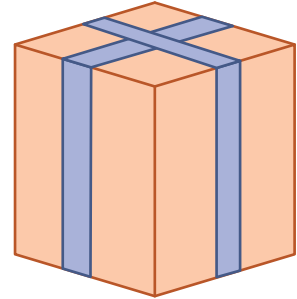
## Opgave 2

Bekijk het probleem in [Voorbeeld 1](#).

- Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.
- Bekijk nu de oplossing die wordt gegeven. Als je een andere of geen oplossing hebt gevonden, probeer dan zelf de formule voor  $I(x)$  af te leiden.
- Bereken met behulp van differentiëren voor welke  $x$  de waarde van  $I$  maximaal is.

## Opgave 3

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte even groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.



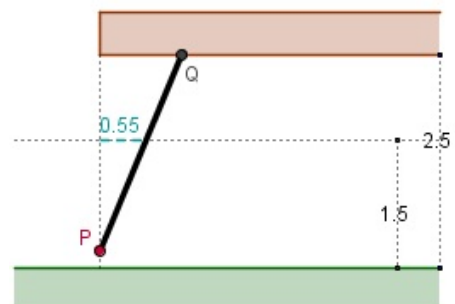
Figuur 5

- Stel een formule op voor de lengte  $L$  van het benodigde sierlint als functie van de breedte  $x$  van de doos.
- Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

## Voorbeeld 2

Bekijk de applet: [garagedeur](#)

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur. Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en je auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?



Figuur 6

Antwoord

Noem de afstand van  $P$  tot het plafond  $x$  en de afstand die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt  $A$ , beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden:  $A(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2,5^2 - x^2}$ .

Met behulp van je grafische rekenmachine vind je dat  $A(x)$  maximaal is als  $x \approx 1,84$  m. En omdat  $A(1,84) \approx 0,77$  m, komt de garagedeur op een hoogte van 1,50 m zo'n 77 cm naar binnen.

## Opgave 4

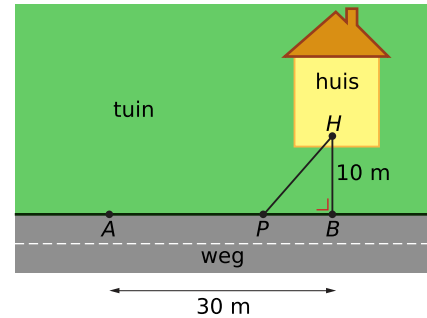
Bekijk het probleem in [Voorbeeld 2](#).

- Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.
- Bekijk nu de oplossing die wordt gegeven. Als je zelf een andere of geen oplossing hebt gevonden, probeer dan nu de formule voor  $A(x)$  af te leiden.
- Bereken met behulp van je grafische rekenmachine voor welke  $x$  de waarde van  $A$  maximaal is.

### Opgave 5

Naar punt  $H$  van een woonhuis moet een nieuwe leiding worden gegraven vanuit het aansluitingspunt  $A$ . Nu kost het graven en weer netjes dichtmaken van een sleuf in de tuin 1,5 keer zoveel tijd als datzelfde werk langs de weggkant  $AB$ . Hoe moet er worden gegraven om alles in zo kort mogelijke tijd te doen?

- Probeer eerst zelf een oplossing te vinden.
- Neem  $x$  m voor de lengte van  $BP$ . Stel een formule op voor de totaal tijd  $T(x)$  als je aanneemt dat  $t$  de benodigde tijd per m langs de weg is.
- Bereken met behulp van je grafische rekenmachine voor welke  $x$  de waarde van  $T$  minimaal is.



Figuur 7

### Voorbeeld 3

#### Bekijk de applet

Je ziet hier de grafiek van de functie  $f$  met  $f(x) = 4 - x^2$ . Het punt  $A$  heeft een  $x$ -coördinaat  $p$  met  $0 < p < 2$ . De lijn  $x = p$  snijdt de grafiek van  $f$  in  $B$  en punt  $C$  heeft dezelfde  $y$ -coördinaat als punt  $B$ . Zo ontstaat een rechthoek  $ABCD$ , zie figuur.

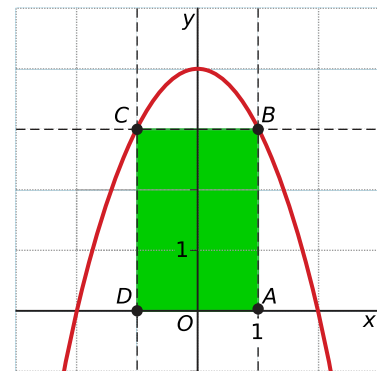
Voor welke waarde van  $p$  is de oppervlakte van rechthoek  $ABCD$  zo groot mogelijk?

Antwoord

Punt  $A$  heeft de coördinaten  $(p, 0)$  en punt  $B$  heeft de coördinaten  $(p, 4 - p^2)$ . Uit de symmetrie van de figuur volgt nu dat de oppervlakte van rechthoek  $ABCD$  gelijk is aan  $2p \cdot (4 - p^2)$ .

Je wilt dus het maximum berekenen van de functie  $g(p) = 2p(4 - p^2)$ .

Dat kan met behulp van je grafische rekenmachine, maar ook met behulp van differentiëren.



Figuur 8

### Opgave 6

Bekijk het maximaliseringsprobleem in [Voorbeeld 3](#).

- Licht toe waarom voor de oppervlakte van rechthoek  $ABCD$  geldt  $g(p) = 2p(4 - p^2)$ .
- Bereken het maximum van  $g(p) = 2p(4 - p^2)$  met behulp van differentiëren.

### Opgave 7

Gegeven zijn de functies  $f$  en  $g$  door  $f(x) = x^2$  en  $g(x) = \sqrt{x}$ . De lijn  $x = p$  met  $0 < p < 1$  snijdt beide grafieken in de punten  $A$  en  $B$ .

Voor welke waarde van  $p$  is de lengte van lijnstuk  $AB$  maximaal?

## Verwerken

### Opgave 8

Op rechthoekige vellen papier van  $1 \text{ m}^2$  worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte. Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

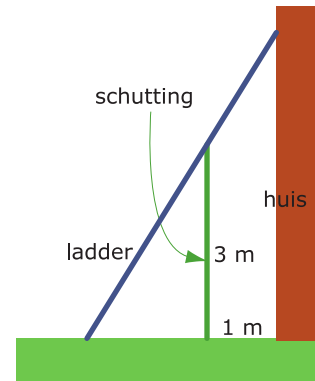
- Maak zelf een schets van de situatie met de gegevens er in.

- b** Probeer eerst zelf het probleem op te lossen. Kijk pas als dat niet lukt naar c en d.
- c** Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door  $x$  dm. Leid een formule af voor de oppervlakte  $A$  van het bedrukte deel als functie van  $x$ .
- d** Bereken met behulp van differentiëren de waarde van  $x$  waarvoor  $A(x)$  maximaal is.
- e** Beantwoord tenslotte de aan het begin gestelde vraag.

### Opgave 9

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen? (Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)



Figuur 9

### Opgave 10

Hoe lang zijn de zijden van de gelijkbenige driehoek met de grootste oppervlakte die een omtrek heeft van 20 cm? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 11

Bekijk de grafiek van de functie  $f$  met  $f(x) = \sqrt{10 - 2x}$  op het domein  $[0, 5]$ . De lijn  $x = k$  (met  $0 < k < 5$ ) snijdt de  $x$ -as in punt  $A$  en de grafiek van  $f$  in punt  $B$ .

- a** Toon aan dat de oppervlakte  $A$  van rechthoek  $OABC$  gelijk is aan:  $A(k) = k\sqrt{10 - 2k}$ .
- b** Bepaal voor welke  $k$  de oppervlakte van rechthoek  $OABC$  zo groot mogelijk is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 12

Gegeven is de familie van functies  $f_p$  door  $f_p(x) = \frac{x^2 + p}{x}$ .

- a** Bereken algebraïsch de extremen van  $f_p$  als  $p = 1$ .
- b** Voor welke waarden van  $p$  heeft  $f_p$  geen extremen?
- c** Voor welke waarden van  $p$  heeft de raaklijn aan de grafiek van  $f$  voor  $x = 2$  een richtingscoëfficiënt van  $-1$ ?

### Opgave 13

In een rechthoekig  $Oxy$ -assenstelsel snijdt lijn  $x = p$  met  $p > 0$  de grafiek van  $f(x) = 4 - x^2$  in punt  $P$ .

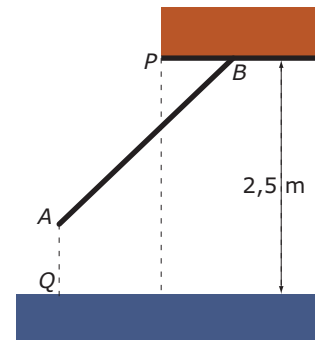
Bereken de minimale waarde die lijnstuk  $OP$  kan aannemen.

## Testen

### Opgave 14

Hier zie je een bewegende garagedeur. De hoogte van punt  $A$  (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van  $PB$ .

Bereken hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 10

### Opgave 15

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = x^2 - (2x - 4)^3$ .

- Bepaal algebraïsch de extremen van  $f$  in twee decimalen nauwkeurig.
- De lijn met vergelijking  $x = k$  met  $0 < k < 2$  snijdt de  $x$ -as in  $A$  en de grafiek van  $f$  in  $B$ . Voor welke waarde van  $k$  is de oppervlakte van  $\triangle OAB$  maximaal?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

