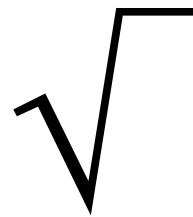


7.4 Wortelfuncties

Inleiding

Alle functies die door transformatie kunnen ontstaan uit $y = x^p$ (waarin p elk willekeurig reëel getal kan zijn) zijn machtsfuncties. Dat geldt ook voor een wortelfunctie g met bijvoorbeeld als functievoorschrift $g(x) = 2\sqrt{x+4} + 5$, want dit kun je schrijven als $g(x) = 2(x+4)^{0,5} + 5$. Over dergelijke functies gaat het hier...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met wortelfuncties als machtsfuncties met een gebroken exponent;
- wortelfuncties differentiëren en daarmee extremen berekenen en vergelijkingen van raaklijnen opstellen.

Voorkennis

- werken met machtsfuncties in het algemeen;
- transformaties toepassen op functies;
- machtsfuncties differentiëren;
- vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de grafiek van de wortelfunctie f met functievoorschrift $f(x) = 2\sqrt{x+4} + 5$.

- Welke karakteristieken heeft de grafiek van f ?
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Waarom is f een machtsfunctie?
- Laat zien, hoe je de afgeleide van f bepaalt.

Uitleg

Alle functies van de vorm $f(x) = x^p$ met p een willekeurig reëel getal en alle functies die daaruit door transformatie kunnen ontstaan heten machtsfuncties.

Dat geldt voor alle lineaire en kwadratische functies, maar ook voor veel wortelfuncties:

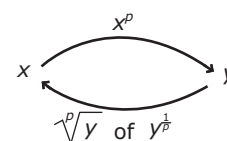
- $f(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie $f(x) = 200(x+30)^{\frac{1}{2}} - 100$.
- $g(x) = 40 - \sqrt[3]{x}$ is te schrijven als machtsfunctie $k(x) = -x^{\frac{1}{3}} + 40$.

Al deze functies kun je door transformatie afleiden uit de bijbehorende machtsfunctie. Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen.

Je kunt vergelijkingen oplossen door de omgekeerde macht te gebruiken, want

$(x^p)^{\frac{1}{p}} = x$ als x positief is. Je moet er dan wel eerst voor zorgen dat je de vergelijking zo schrijft dat de macht (of de wortelvorm) geïsoleerd aan één kant van het isgelijktteken en de rest aan de andere kant van het isgelijktteken staat.

Als je de wortelfunctie schrijft in de vorm van een machtsfuncties kun je hem differentiëren om bijvoorbeeld hellingswaarden te berekenen.



Figuur 2

Er bestaan ook functies waar wel wortelvormen in voorkomen, maar daarnaast ook andere uitdrukkingen. Een voorbeeld is de functie $h(x) = x^2 - 3x\sqrt{x}$. Dit is geen wortelfunctie, maar je kunt het functievoorschrift herleiden tot een verschil van twee machtsfuncties. Zo kun je er toch goed aan rekenen...

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je dat wortelfuncties als machtsfunctie kunnen worden geschreven. Schrijf de volgende functies als machtsfunctie als dat kan.

- a $f(x) = 4\sqrt{x} + 3$
- b $g(x) = \sqrt{4 + x^2}$
- c $h(x) = -3\sqrt{2x - 8} + 6$
- d $k(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 3$

Opgave 2

De functie h met $h(x) = -3\sqrt{2x - 8} + 6$ is een wortelfunctie.

- a Maak de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine en beschrijf met welke transformaties die grafiek kan worden verkregen uit de grafiek van $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
- b Bereken algebraïsch het nulpunt van h . Let er op dat je eerst de wortel isoleert.
- c Los exact op: $h(x) \geq x$.
- d Bepaal de afgeleide van functie h en stel met behulp hiervan een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van h voor $x = 6$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **machtsfunctie** is een functie van de vorm $f(x) = a(b(x + c))^p + d$, waarin p elke reële waarde kan aannemen. Zo'n functie ontstaat door transformatie van $y = x^p$.

Als de macht gebroken is heb je te maken met **wortelfuncties** zoals:

- $f(x) = 1,5\sqrt{2x + 6} - 1$, want dit kun je schrijven als $f(x) = 1,5 \cdot (2(x + 3))^{\frac{1}{2}} - 1$.
- $f(x) = 1,5\sqrt[3]{2x + 6} - 1$, want dit kun je schrijven als $f(x) = 1,5 \cdot (2(x + 3))^{\frac{1}{3}} - 1$.
- $f(x) = 8 - 3 \cdot \sqrt{x + 7}$, want dit kun je schrijven als $f(x) = 8 - 3 \cdot (x + 7)^{\frac{1}{2}}$.

Al deze functies zijn af te leiden van een basisfunctie door de transformaties te bepalen. Bij de laatste functie is de basisfunctie $y = x^{\frac{1}{2}}$ eerst 7 naar links geschoven, daarna met -3 vermenigvuldigd t.o.v. de y-as en daarna 8 omhoog geschoven.

Van een wortelfunctie kun je de afgeleide bepalen door de functie eerst als een machtsfunctie te schrijven. Met die afgeleide kun je dan weer allerlei berekeningen doen zoals het bepalen van extremen het opstellen van vergelijkingen van raaklijnen.

Je moet ook exact of algebraïsch vergelijkingen en ongelijkheden met wortelfuncties kunnen oplossen. Het is bij vergelijkingen met wortels noodzakelijk om achteraf even te controleren of de gevonden waarden voor x wel voldoen. (Door het kwadrateren willen er wel eens oplossingen ontstaan die niet aan de gegeven vergelijking voldoen!).

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met $f(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$. Leg uit hoe de grafiek van h kan ontstaan uit die van $y = x^{\frac{1}{2}}$ en bereken de snijpunten met de assen.

Antwoord

$f(x) = 200\sqrt{x+30} - 100$ is te schrijven als machtsfunctie

$f(x) = 200(x+30)^{\frac{1}{2}} - 100$. Dit is een machtsfunctie die ontstaat door transformatie van $y = x^{\frac{1}{2}}$:

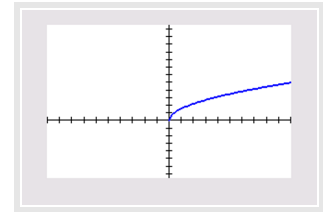
- eerst translatie -30 ten opzichte van de y -as;
- vervolgens vermenigvuldigen met 200 ten opzichte van de x -as;
- tenslotte translatie -100 ten opzichte van de x -as.

Deze transformaties kun je ook toepassen op de instellingen van het venster van je rekenmachine.

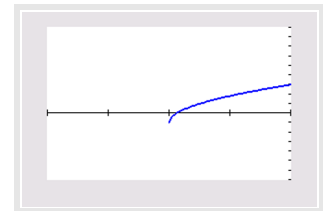
Je ziet de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ goed in beeld als het venster is ingesteld op $[-4,4] \times [-3,5]$.

Dit wordt na transformatie $[-34, -26] \times [-700, 900]$. Ga na, dat je dan de grafiek van f goed in beeld hebt. Je vindt verder:

- Het snijpunt met de y -as uit $f(0) = 200\sqrt{0+30} - 100 \approx 995,45$. Dit wordt $(0; 995,45)$.
- Het snijpunt met de x -as door $f(x) = 0$ ofwel $200\sqrt{x+30} - 100 = 0$ op te lossen. Eerst schrijf je dit als $\sqrt{x+30} = 0,5$ en dan ga je kwadrateren. Dit geeft $x+30 = 0,5^2 = 0,25$ en dus $x = -29,75$ en dus als nulpunt $(-29,75; 0)$;



Figuur 3



Figuur 4

Opgave 3

Bestudeer **Voorbeeld 1**. Bekijk zelf de functie $g(x) = 200 - 50\sqrt{x+4}$.

- Schrijf het functievoorschrift als machtsfunctie.
- Uit welke machtsfunctie van de vorm $y = x^p$ kan de grafiek van g door transformatie ontstaan? Welke transformaties moet je achtereenvolgens toepassen?
- Bepaal domein en bereik van g .
- Bereken de snijpunten van de grafiek van g met de beide coördinaatassen.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 3\sqrt{6-2x}$.

- Bepaal domein en bereik van f .
- Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Voorbeeld 2

Los op: $\sqrt{x+5} + 1 \geq x$.

Antwoord

Eerst los je op: $\sqrt{x+5} + 1 = x$.

Dit schrijf je als $\sqrt{x+5} = x - 1$ (wortel isoleren).

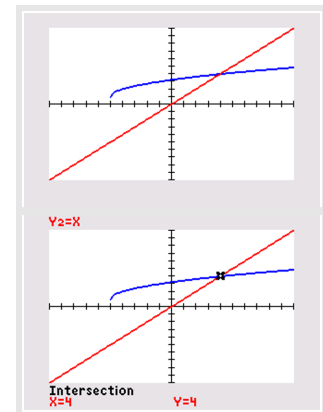
Vervolgens ga je kwadrateren: $x + 5 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

Dus: $x^2 - 3x - 4 = 0$ ofwel $x = -1 \vee x = 4$.

Bekijk je echter de grafieken van $y_1 = \sqrt{x+5} + 1$ en $y_2 = x$ dan zie je maar één snijpunt. Dat klopt ook wel: $x = -1$ voldoet niet aan de vergelijking. Er is alleen een snijpunt voor $x = 4$.

Verder moet je rekening houden met het domein van de wortelfunctie $D_{y_1} = [-5, \rightarrow)$.

De oplossing van de ongelijkheid (zie grafiek) is $-5 \leq x \leq 4$.



Figuur 5

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je een ongelijkheid kunt oplossen waarin wortelfuncties voorkomen die je kunt schrijven als een machtsfunctie. Los de volgende algebraïsch ongelijkheden op:

- a $200\sqrt{x-40} \geq 50$
- b $100 - 25\sqrt{2x+6} < 20$
- c $\sqrt{2x+6} - 1 \geq x$
- d $40 - \sqrt[3]{x} < 24$

Opgave 6

Gegeven zijn de functies f met $f(x) = 2x\sqrt{x} + 4$ en g met $g(x) = 2x\sqrt{x+4}$.

- a Waarom is f wel een machtsfunctie en g niet?
- b Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq g(x)$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie h met $h(x) = x^2 - 3x\sqrt{x}$. Bereken exact het minimum van deze functie.

Antwoord

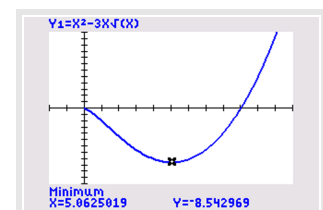
Schrijf $h(x) = x^2 - 3x^{1\frac{1}{2}}$. Dan is $h'(x) = 2x - 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 2x - 4\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Vervolgens los je op: $h'(x) = 0$.

Dit geeft $2x - 4\frac{1}{2}\sqrt{x} = 0$ en dus $\sqrt{x} = \frac{4}{9}x$.

Kwadrateren geeft $x = \frac{16}{81}x^2$. Herleiden op 0 geeft $\frac{16}{81}x^2 - x = 0$ en $x(\frac{16}{81}x - 1) = 0$. Dit geeft $x = 0 \vee x = \frac{81}{16}$.

In de grafiek zie je dat het minimum zit bij $x = \frac{81}{16}$ en dat $h(\frac{81}{16}) = -\frac{2187}{256}$.



Figuur 6

Opgave 7

Bekijk de functie $h(x) = x^2 - 3x\sqrt{x}$.

- Waarom is hier geen sprake van een machtsfunctie?
- Welk domein heeft h ? Bereken exact de nulpunten van h .
- Voer zelf de berekening van het minimum van f uit. Werk met de exacte waarden!
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van h in het rechter snijpunt met de x -as.

Opgave 8

Gegeven is de functie f met $f(x) = x - \sqrt{8 - x}$.

- Laat zien, dat $f'(x) = 0$ geen oplossingen heeft.
- Bepaal domein en bereik van f .

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = 40 - 10\sqrt{12 - 2x}$.

- Laat zien dat f een machtsfunctie is.
- Bepaal exact de snijpunten van de grafiek van f met de beide assen.
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Los algebraïsch op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq 10x$.
- Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f die evenwijdig loopt met de lijn $y = 10x$.

Opgave 10

De functie f met $f(x) = x - \sqrt{5x}$ heeft een minimum.

- Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van dit minimum.
- De raaklijn aan de grafiek van f in zijn snijpunt met de x -as snijdt de y -as in punt P . Bereken de coördinaten van P .

Opgave 11

Gegeven de functie g met $g(x) = 20x^2\sqrt{x} - 100$.

- Laat zien dat g een machtsfunctie is.
- Schrijf domein en bereik van g op.
- Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van g .
- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $g(x) \geq x$.

Opgave 12

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op.

- $16\sqrt[4]{x} \geq \frac{1}{2}x$
- $2\sqrt{2x - 40} + 20 < 100$

Opgave 13

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = \frac{10}{x\sqrt{x}} + 100$ en $g(x) = \frac{10x}{\sqrt{x}}$.

- Beide functies zijn machtsfuncties. Verklaar op grond van de exponent van deze machtsfunctie waarom de grafiek van f altijd dalend en die van g stijgend is.
- Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \geq g(x)$.

Toepassen

Opgave 14: Wortel en parabool

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \sqrt{8x - 4}$ en $g(x) = x^2 + 1$.
De grafieken van f en g hebben het punt $(1,2)$ gemeenschappelijk.

- Plot de grafieken. Neem als venster $[-3,3] \times [0,6]$.
Toon op algebraïsche wijze aan dat in dit punt de hellingen van de grafieken f en g gelijk zijn.
- De horizontale lijn met vergelijking $y = 3$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in de punten B en C .
Bereken exact de lengte van lijnstuk AC .

(naar: pilotexamen havo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 15

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- $\sqrt[3]{2x - 10} - 5 = 0$
- $2\sqrt{3x} + 12 > 2x$
- $2x\sqrt{x} \geq 0,016$

Opgave 16

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4\sqrt{10 - x}$ en $g(x) = 10 - x$.

- Geef domein en bereik van f .
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafieken van f en g .
- Los op: $f(x) > g(x)$.
- Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 6$.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
