

7.3 Afgeleiden

Inleiding

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de veranderingssnelheid van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x . Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren. Dat lijkt tot nu toe misschien een eenvoudige klus. Maar wanneer de functies ingewikkelder worden moet je er speciale **differentieerregels** voor toepassen. Je herhaalt eerst nog even de al bekende technieken. Die worden nu uitgebreid met de machtsfuncties, ook verschoven machtsfuncties.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- regels toepassen bij het differentiëren;
- de machtsregel toepassen op alle machtsfuncties;
- de kettingregel toepassen op functies die ontstaan door transformatie van een machtsfunctie.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide, onder andere voor het berekenen van hellingswaarden en extremen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie f door $f(x) = (3x + 1)^2$.

- Bepaal de afgeleide van f .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.
- Bereken met behulp van de afgeleide het minimum van functie f .
- Waarom kun je bij deze functie het minimum wel zonder afgeleide bepalen?
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ is $f'(0)$.
- Laat zien hoe je deze richtingscoëfficiënt kunt afleiden uit de richtingscoëfficiënt van de grafiek van $y = x^2$ voor $x = 1$.

Opgave V2

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek. De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren). Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

- Waarom is R een samengestelde functie?
- Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?
- Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Bekijk de applet

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de veranderingssnelheid van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x . Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren.

Je hebt al een paar differentieerregels geleerd. Je weet dus dat de afgeleide van $f(a \cdot x + b)$ is $a \cdot f'(a \cdot x + b)$.

De functie f met functievoorschrift $f(x) = (3x + 1)^2$ heeft dus als afgeleide:

$$f'(x) = 3 \cdot 2(3x + 1)^1 = 18x + 6.$$

Ga dit na met behulp van de applet.

Bij deze functie kun je de afgeleide ook bepalen door eerst de haakjes weg te werken en daarna pas te differentiëren. Maar dat gaat alleen omdat de exponent niet erg groot is en bovendien een geheel getal is. En inmiddels weet je dat er ook gebroken en negatieve exponenten bestaan.

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1](#).

- Licht met behulp van transformaties toe waarom de afgeleide van $f(x) = (3x + 1)^2$ gelijk is aan $f'(x) = 2(3x + 1)^1 \cdot 3$.
- Laat zien dat je door eerst haakjes weg te werken dezelfde afgeleide krijgt.
- Voer het functievoorschrift van f in je grafische rekenmachine in en bepaal met behulp daarvan de hellingwaarde voor $x = 0$. Ga na dat deze waarde overeen komt met $f'(0)$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2(4x - 2)^5 - 1$.

- Welke transformaties moet je toepassen op de grafiek van $g(x) = x^5$ om die van f te krijgen?
- Bepaal de afgeleide van f .
- Bereken met behulp van die afgeleide de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$. Controleer je antwoord met behulp van de grafische rekenmachine.

Uitleg 2

Functies zoals $f(x) = \sqrt{x}$ zijn in feite machtsfuncties, want:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Je kunt ze daarom differentiëren met behulp van de machtsregel:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Zo'n afgeleide herleid je dan weer tot een vorm zonder gebroken en/of negatieve exponenten:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Op deze manier kun je ook van wortelfuncties en gebroken functies de afgeleide bepalen: je schrijft ze eerst als machtsfunctie. Daarop pas je dan de machtsregel voor differentiëren toe. Je ziet nu ook waarom het belangrijk is wortels en breuken tot machten (en omgekeerd) te kunnen herleiden.

Opgave 3

Je hebt in **Uitleg 2** gezien hoe je een wortelfunctie kunt differentiëren met behulp van de machtsregel. Neem nu de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Schrijf deze functie als machtsfunctie.
- Bepaal de afgeleide van deze functie met behulp van de machtsregel en herleid de afgeleide tot een vorm zonder negatieve exponent.
- Differentieer $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.
- Differentieer $f(x) = \frac{3}{4x^5}$.
- Differentieer $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$.
- Differentieer $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$.

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = \sqrt{3x - 6}$.

- Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $g(x) = \sqrt{x}$?
- De afgeleide van g kun je bepalen met behulp van de machtsregel. De afgeleide van f kan hieruit worden afgeleid. Laat dit zien.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ bepaal je door te differentiëren. Je kent al een aantal differentieerregels:

Machtsregel:

Als $f(x) = cx^r$ dan is $f'(x) = rcx^{r-1}$ voor elke c en voor elke reële waarde van r .

Constanteregels:

Als $f(x) = c$ dan is $f'(x) = 0$.

Somregel:

Als $f(x) = u(x) \pm v(x)$ dan is $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Kettingregel voor eenvoudige samengestelde functies:

Als $f(x) = a \cdot (bx + c)^r + d$ dan is $f'(x) = a \cdot r(bx + c)^{r-1} \cdot b$ voor elke reële waarde van a , b , c , d en van r .

Met deze regels kun je ook wortelfuncties en gebroken functies differentiëren. Er blijven echter nog functies waarvan je de afgeleide met deze regels niet kunt bepalen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = (2x - 6)^4 - 5$.

Toon aan dat deze functie een minimum heeft en bereken dat minimum. Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Antwoord

Het aantonen dat f een minimum heeft kan met behulp van de afgeleide. Je kunt ook bekijken hoe de grafiek van f kan ontstaan door transformatie van die van $g(x) = x^4$, een functie met een minimum van 0 voor $x = 0$.

De drie transformaties zijn:

- translatie van 6 t.o.v. de y -as,
- vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ t.o.v. de y -as,
- translatie van -5 t.o.v. de x -as.

Hiermee vind je het minimum van f , namelijk $\min. f(3) = -5$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn kun je natuurlijk met je rekenmachine bepalen.

Maar nu moet je de afgeleide gebruiken: $f'(x) = 4(2x - 6)^3 \cdot 2 = 8(2x - 6)^3$.

Je krijgt dus een richtingscoëfficiënt van $f'(0) = 8 \cdot -6^3 = -1728$. De raaklijn heeft daarom een vergelijking van de vorm $y = -1728x + b$. Omdat $f(0) = 6^4 - 5 = 1291$ krijg je als vergelijking $y = -1728x + 1291$.

Opgave 5

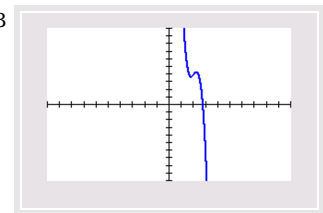
Gegeven is de functie: $f(x) = (2x + 8)^4 - 6$.

- Welke transformaties zijn nodig om de grafiek van f te verkrijgen uit: $g(x) = x^4$?
- Bereken hoe groot het minimum van f is met behulp van de afgeleide.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -2$.
- In welk punt van de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de lijn $y = 8x$?

Opgave 6

Hier zie je de grafiek van de functie f gegeven door $f(x) = 2x - 0,5(3x - 6)^3$ zoals een grafische rekenmachine die maakt met de standaardinstellingen van het venster. Er lijken twee extremen te zijn.

- Ga met behulp van de afgeleide van f na, dat er inderdaad twee extremen zijn en bereken de exacte waarden van die extremen.
- De afgeleide f' heeft zelf een maximum voor $x = 2$. Toon dit aan.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.



Figuur 2

Voorbeeld 2

Differentieer de functies:

- $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{2x-1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{4x+1}$
- $f(x) = \frac{x^2+2\sqrt{x}}{3x}$

Antwoord

Bekijk nog even de differentieerregels in de theorie. Denk ook om het weer herleiden van de afgeleide tot een vorm zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

- $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} = x^2 - 4x^{1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 2x - 6x^{\frac{1}{2}} = 2x - 6\sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{2x-1}{x} = 2 - x^{-1}$ geeft $f'(x) = 0 + 1x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = \sqrt{4x+1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$
- $f(x) = \frac{x^2+2\sqrt{x}}{3x} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{x}}$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2** zonder naar het antwoord te kijken.

- Bepaal eerst zelf deze vier afgeleiden.
- Oefen jezelf met behulp van het **Practicum**.

Opgave 8

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = 3\sqrt{2x-6}$
- $f(x) = 6x^2\sqrt{x} - 4\sqrt{5-x}$
- $f(x) = \frac{x^3-2\sqrt{x}}{4x}$
- $f(x) = \frac{15}{5-3x}$

Voorbeeld 3

Bij het lozen van olie in stilstaand water ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek. De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren). Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$. Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 5 uur? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De snelheid waarmee de straal van de cirkel verandert op $t = 5$ is $R'(5)$.

Nu is $R(t) = (7t)^{\frac{1}{2}}$ en dus $R'(t) = \frac{1}{2}(7t)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7 = \frac{7}{2\sqrt{7t}}$.

Dus is $R'(5) = \frac{7}{2\sqrt{35}} \approx 1,18$ m/uur.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** zie je een toepassing van een wortelfunctie.

- Bepaal zelf - zonder eerst naar het antwoord te kijken - de afgeleide van $R(t)$. Vergelijk je antwoord met de afgeleide in het voorbeeld.
- Je kunt deze afgeleide ook bepalen door de functie te schrijven als $R(t) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{t}$. Laat zien hoe je in dat geval de afgeleide vindt.
- Laat ook zien dat je met de afgeleide bij b dezelfde uitkomst vindt voor $R'(3)$.

Verwerken

Opgave 10

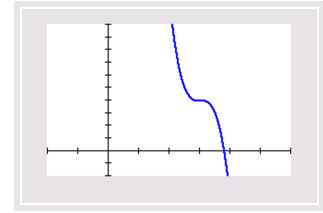
Differentieer de volgende functies.

- $f(x) = (x^2 - 100)^2$
- $g(x) = -5 + (1-x)^3$
- $H(t) = 25(2-4t)^3$
- $y(x) = 2p^2x - (px+3)^4$

Opgave 11

Hier zie je de grafiek van de functie $f(x) = -(2x - 6)^3 + 4$.

- De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve $x = 3$. Toon aan dat dit inderdaad het geval is.
- De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de x -as in punt P . Bereken de coördinaten van P .



Figuur 3

Opgave 12

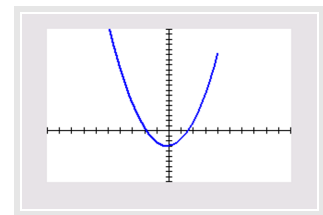
Bepaal van de volgende functies de afgeleide:

- $y = \sqrt[3]{x^7}$
- $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$
- $H(p) = \frac{1}{\sqrt{1-3p}}$
- $g(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

Opgave 13

Hier zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - \sqrt{8-2x}$.

- Bepaal het domein van f .
- Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f . Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- A is het beginpunt van de grafiek van f . Wat is er voor bijzonder aan de hand met de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A aan de grafiek? Welke vergelijking heeft die raaklijn?



Figuur 4

Opgave 14

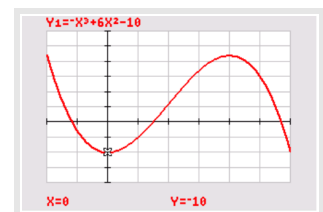
Een gelijkstroomcircuit bestaat uit een 12 volts batterij met een inwendige weerstand van 12 ohm en een variabele weerstand van R (ohm). Het vermogen P (in watt) dat door dit circuit wordt opgewekt, wordt gegeven door $P = RI^2$. De stroomsterkte I (ampère) wordt daarin gegeven door $I = \frac{12}{R+12}$.

- Druk het ontwikkelde vermogen uit in I , de stroomsterkte.
- Bereken het maximaal ontwikkelde vermogen met behulp van differentiëren.

Opgave 15

Je ziet hier een deel van de grafiek van de functie $y = -x^3 + 6x^2 - 10$.

- De grafiek heeft twee (lokale) extremen. Bereken beide extremen.
- Bereken het punt van de grafiek tussen de twee toppen waarin de hellingswaarde het grootst is.



Figuur 5

Toepassen

Opgave 16: Functies met een wortel

Gegeven is de functie f_{18} : $f_{18}(x) = x\sqrt{x+18}$.

De grafiek van f_{18} wordt 18 naar rechts geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g , met $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$.

- Toon op algebraïsche wijze aan dat het gegeven functievoorschrift van g inderdaad bij deze verschuiving hoort.
- De functie $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$ heeft een minimum. Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van x dit minimum wordt aangenomen.

(naar: examen havo wiskunde B in 2011, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 17

Differentieer de volgende functies.

- $f(x) = 6(1 + 2x)^3$
- $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$
- $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi}t}$
- $f(x) = \sqrt{10 + 8x}$
- $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$
- $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 18

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x+2}$.

- Als je de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine bekijkt met de standaardinstellingen van het venster, lijkt het wel een rechte lijn te zijn. Wat is het domein van f ?
- Bepaal de afgeleide van f .
- Bereken met behulp van deze afgeleide het minimum van f .
- Wat is het bereik van deze functie f ?
- Bereken exact de hellingwaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y -as snijdt.

Practicum: Machtsfuncties

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het differentiëren van machtsfuncties, waaronder gebroken functies en wortelfuncties**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
