

7.2 Machtsfuncties

Inleiding

Bij functies van de vorm $f(x) = x^p$ hangt het verloop van de functie af van de waarde van p . Voor bijvoorbeeld $p = 2$ krijg je een kwadratische functie met als grafiek een parabool. Deze functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$. Voor $p = 1$ krijg je een lineaire functie, die stijgend is voor elke waarde van x . In dit onderdeel zul je zien dat voor negatieve en gebroken waarden van p je machtsfuncties krijgt met weer een ander karakter.

Je leert in dit onderwerp

- het verband tussen de waarde van p en het verloop van de grafiek van $f(x) = x^p$ kennen;
- werken met functies die door transformaties van $f(x) = x^p$ ontstaan.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen met machten oplossen;
- werken met de rekenregels voor machten en exponenten.

Verkennen

Opgave V1

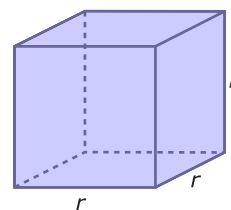
Machtsfuncties hebben de vorm $f(x) = c \cdot x^p$. Je kunt de bijbehorende grafieken bekijken met de grafische rekenmachine. Je kiest dan voor c en voor p getallen. Neem voor het gemak steeds $c = 1$ en neem voor p een geheel getal.

- Welke van deze machtsfuncties hebben een minimum? Welke coördinaten horen er bij het punt waar het minimum zit?
- Zijn er machtsfuncties die overal op hun domein stijgend zijn? Zo ja, geef dan een paar voorbeelden.
- Hoe kun je er voor zorgen dat de machtsfunctie $f(x) = x^p$ dalend is voor positieve waarden van x ? Neem nu ook gebroken getallen voor p .
- Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $p = \frac{1}{2}$ en die bij $p = \frac{1}{3}$?
- Bekijk de grafiek bij $p = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?
- Als p een niet geheel decimaal getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Bij functies van de vorm $f(x) = x^p$ hangt het verloop van de functie af van de waarde van p . Voor bijvoorbeeld $p = 2$ krijg je een kwadratische functie met als grafiek een parabool. Deze functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$. Voor $p = 1$ krijg je een lineaire functie, die stijgend is voor elke waarde van x . In dit onderdeel zul je zien dat voor negatieve en gebroken waarden van p je machtsfuncties krijgt met weer een ander karakter.



Figuur 1

Je ziet hiernaast de grafieken van $f(x) = x^p$ voor enkele *positieve* gehele waarden van p . Merk op:

- Als p een positief *even* getal is, geldt dat:
 - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \rightarrow)$;
 - de grafiek dalend is als $x < 0$ en stijgend als $x > 0$;
 - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$, één oplossing heeft als $a = 0$ en geen oplossingen heeft als $a < 0$.
- Als p een positief *oneven* getal is, geldt dat:
 - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$;
 - de grafiek stijgend is voor elke waarde van x (behalve 0);
 - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a .

Opgave 1

Plot de grafieken van de functies $f(x) = x^4$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$ en $j(x) = x$.

- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = g(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > g(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = h(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > h(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = j(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt: $f(x) > j(x)$?

Om de voorgaande vragen in het algemeen te kunnen beantwoorden, kijk je naar twee functies: $f(x) = x^p$ en $g(x) = x^q$, waarbij p een even positief getal is en q een oneven positief getal.

- Neem de tabel over en vul hem in. Gebruik de grafische rekenmachine.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$p < q$				
$p > q$			$f(x) < g(x)$	

Tabel 1

Opgave 2

Bekijk de functies $k(x) = x^5$ en $l(x) = x^6$.

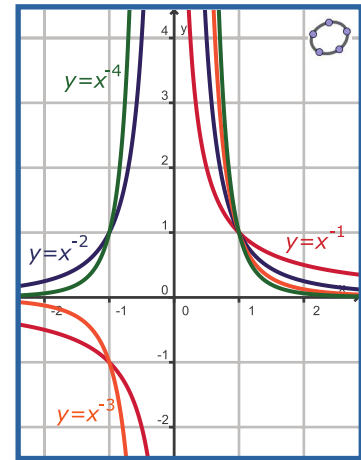
- Maak een schets van de grafieken van $k(x)$ en $l(x)$. Geef ook punt (1,1) aan. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.
- Voor welke waarden van x geldt $x^6 = 10$? Los op: $x^6 < 10$. Rond af op twee decimalen.
- Voor welke waarde van x geldt $x^5 = 10$? Los op: $x^5 > 10$. Rond af op twee decimalen.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Kijk goed naar de grafieken van $f(x) = x^p$ voor enkele *negatieve* gehele waarden van p . Als p een negatief getal is heb je te maken met een gebroken functie.

- Als p een negatief *even* getal is, geldt dat:
 - $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$;
 - de grafiek stijgend is als $x < 0$ en dalend als $x > 0$;
 - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$ en geen oplossingen heeft als $a \leq 0$.
- Als p een negatief *oneven* getal is, geldt dat:
 - $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$;
 - de grafiek dalend is voor elke waarde van x (behalve 0);
 - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a behalve $a = 0$.



Figuur 2

Bij een gebroken functie heb je te maken met asymptoten. Een asymptoot is een lijn waar de grafiek steeds meer toe nadert, maar waarmee hij nooit samenvalt.

Om bij een gebroken functie de verticale asymptoot te vinden bekijk je wat de variabele in de noemer niet kan zijn. In het geval van $y = \frac{1}{x}$ mag x geen 0 zijn. De verticale asymptoot is: $x = 0$.

Om bij een gebroken functie de horizontale asymptoot te vinden kijk je wat er gebeurt met y als x heel groot positief of negatief wordt. In het geval van $y = \frac{1}{x}$ wordt y dan heel klein, bijna 0. De horizontale asymptoot is $y = 0$.

Opgave 3

Maak met je grafische rekenmachine grafieken van de functies: $k(x) = x^{-1}$ en $l(x) = x^{-2}$.

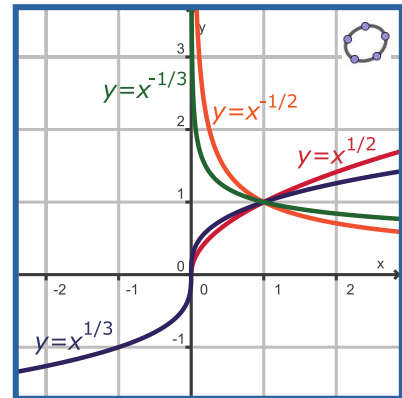
- a Welke asymptoten hebben deze functies?
- b Voor welke waarden van x geldt $k(x) = l(x)$?
- c Los op: $k(x) < l(x)$.
- d Los de volgende vergelijkingen op:
 - $x^{-1} = 0,005$ en $x^{-2} = 0,005$
 - $x^{-1} = 5000$ en $x^{-2} = 5000$
- e Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} < 0,005$?
- f Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} > 5000$?
- g Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} < 0,005$?
- h Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} > 5000$?

Uitleg 3

Bekijk de applet

Je ziet hiernaast grafieken van $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$ voor enkele gehele waarden van p . Merk op:

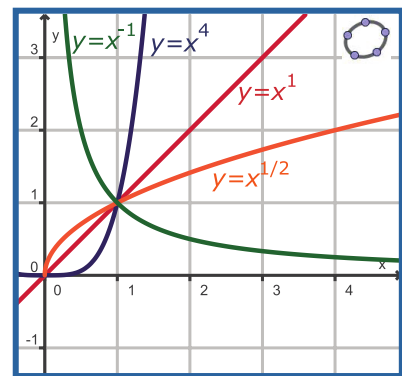
- Als $p > 1$ en p even geldt dat:
 - $D_f = [0, \rightarrow)$ en $B_f = [0, \rightarrow)$;
 - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
 - de grafiek gaat door $(0,0)$ en $(1,1)$;
 - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a \geq 0$.
- Als $p > 1$ en p oneven geldt dat:
 - $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$;
 - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
 - de grafiek gaat door $(0,0)$, $(1,1)$ en $(-1,-1)$;
 - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft voor alle waarden van a .



Figuur 3

Bekijk de applet

- Als $p < -1$ en p even geldt dat:
 - $D_f = (0, \rightarrow)$ en $B_f = (0, \rightarrow)$;
 - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
 - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
 - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a > 0$.
- Als $p < -1$ en p oneven geldt dat:
 - $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \rightarrow)$ en $B_f = (-\infty, 0) \cup (0, \rightarrow)$;
 - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
 - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
 - de vergelijking $f(x) = a$ één oplossing heeft als $a \neq 0$.



Figuur 4

Kijk nog eens goed of je grafische rekenmachine dezelfde grafieken geeft. Er kunnen verschillen zijn. Merk ook op dat de grafiek in de buurt van $x = 0$ niet altijd helemaal netjes wordt gemaakt.

Opgave 4

Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies $a(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $b(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $c(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ en $d(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

- Voor welke waarden van x geldt $a(x) < b(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt $d(x) < b(x)$?
- Voor welke waarden van x geldt $d(x) < c(x)$?
- Maak de grafiek van $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$. Controleer je schets met de applet of de grafische rekenmachine.
- Voor welke waarden van x geldt $x^{\frac{1}{4}} > 4$?

Theorie en voorbeelden

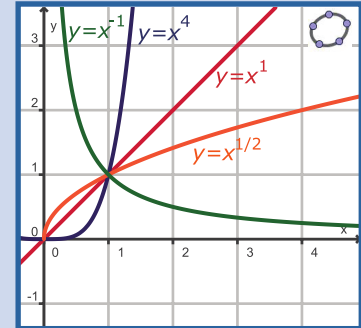
Om te onthouden

Bekijk de applet

Je ziet hier enkele grafieken van de **machtsfunctie** $f(x) = x^p$ voor verschillende waarden van p .

Eigenschappen voor $x > 0$ zijn:

- $p > 1$: de grafiek gaat door $(0,0)$ en $(1,1)$ en stijgt steeds sneller.
- $p = 1$: f is een lineaire functie door $(0,0)$ en $(1,1)$.
- $0 < p < 1$: de grafiek gaat door $(0,0)$ en $(1,1)$ en stijgt steeds langzamer.
- $p < 0$: de functie is niet gedefinieerd voor $x = 0$, de grafiek gaat door $(1,1)$ en daalt steeds langzamer, de x -as en de y -as zijn asymptoten van de grafiek.



Figuur 5

Voor $x < 0$ bestaat de functie alleen als p een geheel getal is (of als

p een breuk is met een oneven noemer, zoals $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, etc). Afhankelijk van het even of oneven zijn van p is de grafiek daar dalend of stijgend.

De vergelijking $x^p = a$ heeft één oplossing als $a > 0$ en p geen even geheel getal (ongelijk 0) is.

Als $a > 0$ en p een even geheel getal (ongelijk 0) is, zijn er twee oplossingen.

De vergelijking $x^p = a$ heeft één oplossing als $a < 0$ en p een oneven geheel getal (ongelijk 0) is.

Voorbeeld 1

Los op: $3x^{\frac{3}{2}} < 12$.

Antwoord

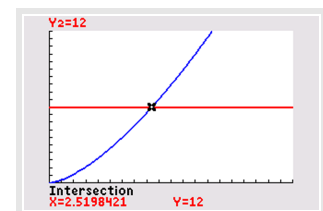
Beide kanten delen door 3 geeft: $x^{\frac{3}{2}} < 4$.

Los eerst op $x^{\frac{3}{2}} = 4$.

Oplossing: $x = 4^{\frac{2}{3}} \approx 2,52$.

Maak de grafiek van $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ op de grafische rekenmachine. Merk op dat $D_f = [0, \rightarrow)$. De vergelijking heeft inderdaad maar één oplossing.

Nu lees je de (benaderde) oplossing van de ongelijkheid uit de grafiek af: $0 \leq x < 2,52$.



Figuur 6

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** de ongelijkheid $3x^{\frac{3}{2}} < 12$.

- Los zelf eerst de vergelijking $3x^{\frac{3}{2}} = 12$ algebraïsch op.
- In het voorbeeld wordt daarbij een macht met exponent $\frac{2}{3}$ gebruikt. Licht die stap toe. Heb je dat zelf ook gedaan?
- Los op dezelfde manier algebraïsch op: $15x^{\frac{3}{5}} < 180$. Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x - 4)^3 - 10$.

Los algebraïsch op: $f(x) = 20$.

Beschrijf welke transformaties er nodig zijn om vanuit $y = x^3$ tot de functie $f(x)$ te komen.

Antwoord

Functie f kan door transformatie ontstaan uit de machtsfunctie $y = x^3$. Eerst 4 verschuiven in de positieve x -richting (dus t.o.v. de y -as), dan vermenigvuldigen met 2 in de y -richting en tenslotte 10 verschuiven in de negatieve y -richting.

Om $f(x) = 20$ op te lossen, moet je stap voor stap terugrekenen:

$$2(x - 4)^3 - 10 = 20$$

$$2(x - 4)^3 = 30$$

$$(x - 4)^3 = 15$$

$$x - 4 = 15^{\frac{1}{3}}$$

$$x = 15^{\frac{1}{3}} + 4$$

Je vindt dus $x = 15^{\frac{1}{3}} + 4 \approx 6,47$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = 3(x + 1)^3 - 5$.

- Beschrijf in de juiste volgorde welke transformaties er nodig zijn vanuit $y = x^3$ om tot de functie $f(x)$ te komen. Geef elke keer aan wat er met de grafiek gebeurt als je deze transformatie toepast.
- Los exact op: $f(x) < 10$.

Voorbeeld 3

Los exact op: $\frac{1}{x^4} > 4$.

Antwoord

Omdat $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ is ook hier sprake van een machtsfunctie. Maak eerst de grafiek van f en de lijn $y_2 = 4$ op je grafische rekenmachine.

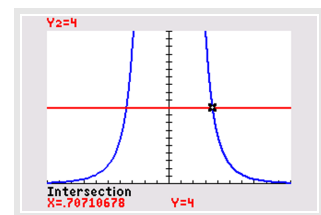
Los nu op: $x^{-4} = 4$.

Oplossing: $x = 4^{-\frac{1}{4}}$ of $x = -4^{-\frac{1}{4}}$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen: **Figuur 7**

$$-4^{-\frac{1}{4}} < x < 0 \vee 0 < x < 4^{-\frac{1}{4}}$$

Merk op dat je $x = 0$ uitzondert omdat voor deze waarde de functie f niet gedefinieerd is.



Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine. Houd ook rekening met het domein van de verschillende functies.

- $x^2 < \sqrt{x}$
- $\frac{1}{x^4} = 81$

- c $\frac{1}{x^3} < 27$
- d $\frac{1}{x^3} < 30$
- e $x^5 < x^4$
- f $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x + 1)^{-2} - 4$.

- a Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$?
- b Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren op de grafiek van $y = x^{-2}$ om die van f te krijgen.
- c Welke asymptoten heeft de grafiek van f ?
- d Schrijf domein en bereik van f op.
- e Los op: $f(x) < 10$.

Verwerken

Opgave 9

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de marketingafdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro. De verkoop per dag varieert van 100 tot 1000 kg.

- a Schrijf de formule zo, dat blijkt dat de afzet recht evenredig is met de macht van de prijs.
- b Teken de grafiek met de grafische rekenmachine voor de prijs tussen € 1,00 en € 5,00 per kg. Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de afzet dan meer of minder dan de helft? Hoe kun je dat aan de grafiek direct zien?
- c Het bedrijf heeft een voorraad van 300 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.
- d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef zelf aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}} + 5$.

- a Leg uit dat de grafiek van deze functie kan ontstaan door transformatie van de grafiek $y = x^{-\frac{1}{2}}$.
- b Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek van f te krijgen?
- c Schrijf domein en bereik van f op.
- d Los op: $f(x) \leq 10$.

Opgave 11

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

- a Schrijf f en g als machtsfunctie en beschrijf hoe de grafiek van $f(x)$ vanuit die van $g(x)$ kan ontstaan.
- b Geef het domein en bereik van zowel f als g .
- c Los op: $f(x) \geq 100$.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

- Laat zien, dat de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie. Schrijf bijbehorende transformaties op.
- Welke asymptoten heeft de grafiek van f ?
- Schrijf domein en bereik van f op.
- Los op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- $3(x+2)^6 - 30 = 300$
- $8 - 4\sqrt{x-3} > 4$
- $\sqrt[9]{x} < 9$
- $5(x+7)^3 > 45$
- $2 + 9\sqrt{x-5} < 20$

Opgave 14

Een functie die door transformatie uit een machtsfunctie ontstaat is: $h(x) = a(x-b)^c + d$.

- Voor welke waarden van c heeft de functie een maximum of minimum?
- Waar hangt het van af of het een maximum of minimum is?
- Hoe kun je uit deze formule aflezen waar de top zich bevindt? Geef de coördinaten van deze top.

Toepassen

Opgave 15: De formule van Kleiber

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (in L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (in kg), dus $Z = c \cdot m^p$. In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens. Bij het opstellen van een formule voor Z afhankelijk van m wordt gebruik gemaakt van de gegevens van de muis en het paard. Hierbij wordt het verband $Z = 0,66m^{0,76}$ gevonden.

soort	$m(\text{kg})$	$Z(\text{L})$
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 2

- Laat zien hoe je deze formule kunt vinden.
- Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?
- Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg.

Opgave 16: Energieverbruik van zoogdieren

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. Hoe zwaarder een zoogdier is, hoe meer energie het kost om de lichaamstemperatuur constant te houden. Het gewicht G (gram) is recht evenredig met een macht van de energie P (joule) die per minuut nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden.

Je ziet een tabel met een aantal waarden voor G en P .

G	1000	2000	5000	15000
P	3,02	5,08	10,11	23,04

Tabel 3

- a Stel een formule op waarin je P uitdrukt in G .
- b Hoeveel energie P per minuut heeft een mens van 70 kg nodig? Rond af op twee decimalen.
- c Wat gebeurt er met P als G twee keer zo groot wordt?

Testen

Opgave 17

Geef van de volgende machtsfuncties

- het domein en het bereik;
 - de intervallen waarop de grafiek dalend dan wel stijgend is;
 - het maximum of minimum (voor zover van toepassing);
 - de asymptoten (voor zover van toepassing).
- a $a(x) = x^5$ en $b(x) = x^6$
 - b $c(x) = x^{-3}$ en $d(x) = x^{-4}$
 - c $e(x) = x^{\frac{1}{4}}$ en $f(x) = x^{3\frac{1}{2}}$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- a $2(x + 3)^4 - 10 = 500$
- b $10 - 2\sqrt{x - 4} > 6$
- c $\sqrt[4]{x} < 20$
- d $2(x + 1)^3 > 20$

Practicum: Machtsfuncties

Met deze applet maak je machtsfuncties. Verzin zo'n functie, bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = x^p$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

[Bekijk de applet: Machtsfuncties](#)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
