

6.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal
- definitieformules — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen
- definitieformules en eigenschappen van logaritmen gebruiken — vergelijkingen met logaritmen oplossen
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen

Achtergronden

In 1614 verscheen 'Mirifici logarithmorum canonis descriptio' van **sir John Napier (1550-1617)**. Hierin staat de eerste beschrijving van logaritmen. In het voorwoord legt Napier uit dat zijn doel was het vinden van een eenvoudige manier om grote getallen te vermenigvuldigen, te delen, te kwadrateren en er wortels uit te trekken. Hij voerde een bepaalde handeling op die grote getallen uit waardoor hij er getallen van maakte waarmee hij door eenvoudig optellen en aftrekken hetzelfde resultaat verkreeg als andere door lastige vermenigvuldigingen en delingen. Die handeling (een functie zou je nu zeggen) noemde hij 'logaritme nemen' ('logos arithmos' is 'verhouding van getallen'). Een voorbeeld:



Figuur 1

Stel je wilt $a \cdot b = 1296 \cdot 63.508$ berekenen.
Je neemt van beide getallen de logaritme (grondtal 10):
 $\log(1296) = 3,112605...$ en $\log(63.508) = 4,8028284...$
Nu gebruik je de rekenregel: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
Dus is $\log(a \cdot b) = 3,112605... + 4,8028284... = 7,915433...$
Nu werk je die logaritme weer weg en je vind het antwoord $82.306.368$.

Je ziet hoe Napier van een vervelende vermenigvuldiging $1296 \cdot 63.508$ een gemakkelijke optelling maakte! In de tijd dat er geen elektronische rekenmachines waren, was dit een enorm belangrijke stap vooruit. Napier's logaritmen hadden trouwens nog niet het grondtal 10 (zoals in het voorbeeld), dat laatste is het werk van Henry Briggs (1561-1630). Hij las in 1615 de Latijnse versie van Napier's geschrift en was er meteen van onder de indruk. Hij suggereerde Napier zijn logaritme zo aan te passen, dat $\log(1) = 0$ en het grondtal 10 is. Ze werden het eens en Briggs maakte een tabel voor logaritmen van getallen gebaseerd op grondtal 10.

Testen

Opgave 1

Een bedrijf verwacht dat de komende jaren zijn aandelen 11% per jaar in waarde gaan stijgen.

- a Hoelang duurt het totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden? Rond af op gehele jaren.
- b Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Ga uit van een jaarlijkse stijging van 11%. Bereken na hoeveel jaar het bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe je hiermee de eigenschap ${}^g \log(a) + {}^g \log(b) = {}^g \log(ab)$ kunt toelichten.

Opgave 2

Een doorzichtige kunststof absorbeert per centimeter 27% van het licht dat erdoorheen valt.

Bereken in millimeter nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 3

Los algebraïsch op.

- a $\frac{1}{3} \log(x + 2) = -2$
- b $2 \log(x) = 5 - 2 \log(10)$
- c $5 \log(4x^2) = 2 + 5 \log(x)$
- d $10 + 5 \cdot 2 \log(x - 5) \leq 100$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x + 10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

- a Bepaal van beide functies het domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot.
- b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.
- c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$
Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.
- d Toon aan dat $h(x) = \log(-100000x - 10000x^2)$.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar (mbar) hangt af van de hoogte h (km) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt: $h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

- a Neem aan dat $p_0 = 1010$ mbar. Plot de grafiek van h als functie van p .
In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 mbar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 mbar.
- b Hoe hoog vliegt het vliegtuig?
- c Laat zien dat p een exponentiële functie is van h .
- d Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ mbar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.
De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 mbar op zeeniveau en berekent dat het toestel op 3 km hoogte vliegt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 mbar.
- e Hoe hoog vliegt het toestel in werkelijkheid? Rond af op meter.

Opgave 6

Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelpenlengte L (mm) en het gewicht van het vlees W (gram) van mosselen. Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelpenlengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelpenlengte en het gewicht van het vlees gemeten. In één van de jaren leiden de resultaten tot de volgende formule: $\log(W) = -5,5 + 3,1 \cdot \log(L)$

Werk deze formule om tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.

(naar: examen havo wiskunde B in 2011, tweede tijdvak)

Toepassen

Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip 'zuurgraad' gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[\text{H}_3\text{O}^+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7} : $\text{pH} = -\log(10^{-7}) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$.

- Bij geconcentreerd zwavelzuur is $[\text{H}_3\text{O}^+] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?
- Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+ -concentratie in mol/L?
- Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+ -concentratie van zure regen?
- Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?
- De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijke pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+ -concentratie dan?

Opgave 8: C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

- Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?
- Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer 0,65 keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.
- In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?
- Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?

Examen

Opgave 9: Windsnelheid en hoogte

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Tabel 1

- a** Bereken a en b met behulp van de gegevens in de tabel. Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$$W = 5,76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

Hierin is:

- W de windsnelheid (in m/s);
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter. In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

- b** Boven open bouwland met $r = 0,12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid 6,0 m/s. Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

Boven een bepaald terrein en met $m = 0,45$ geldt het volgende: de windsnelheid is op 60 meter hoogte 1,3 keer zo groot als op 20 meter hoogte.

- c** Bereken de waarde van r van dit terrein.

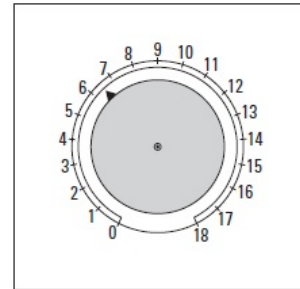
(bron: examen wiskunde B havo 2006, eerste tijdvak)

Opgave 10: Volumeknop

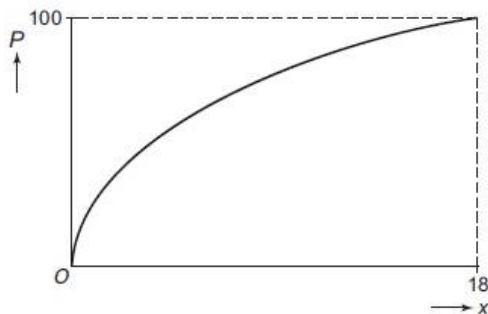
Bekijk de figuur waarin je de volumeknop op een versterker kunt draaien vanuit stand 0 naar stand 18. In stand 0 geeft de versterker geen geluid. In stand 18 geeft de versterker het maximale geluidsniveau. De volgende formule geldt: $P = a \cdot \log(x + 1)$

Hierin is x de stand van de volumeknop, P het percentage van het maximale geluidsniveau en a een constante. De grafiek geeft het verband tussen x en P weer. Uit de gegevens is af te leiden dat $a \approx 78$.

Ga in de volgende vragen uit van $a = 78$.



Figuur 2

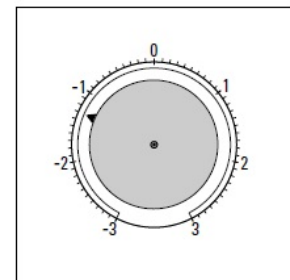


Figuur 3

- Bereken a in drie decimalen.
- Bereken bij welke stand van de volumeknop het geluidsniveau gelijk is aan 75% van het maximale geluidsniveau. Geef je antwoord in één decimaal.

Bij deze versterker wordt de wijzerplaat van de volumeknop vervangen door de wijzerplaat van de figuur. In stand -3 geeft de versterker geen geluid. In stand 3 geeft de versterker het maximale geluidsniveau. k is de stand van de volumeknop bij deze wijzerplaat.

- In de figuur is k gelijk aan -1,3.
Onderzoek hoe groot de waarde van P is bij deze stand van de volumeknop.
- Voor het verband tussen de stand k van de volumeknop en het percentage P van het maximale geluidsniveau geldt ook bij deze wijzerplaat een formule. Stel deze formule op.



Figuur 4

(bron: examen havo wiskunde B in 2005, tweede tijdvak)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
