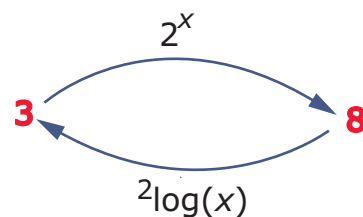


6.4 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Onder andere bij het berekenen van nulpunten van functies ben je al vergelijkingen tegengekomen waarin logaritmen voorkomen. Uit de definitie volgt dat je vanuit een logaritme kunt terugrekenen door een exponentiële functie met hetzelfde grondtal te gebruiken. Hiermee kun je vergelijkingen met logaritmen oplossen. Soms gebruik je er ook de eigenschappen van logaritmen bij. Bij ongelijkheden moet je ook nog rekening houden met het domein van de logaritme!



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmische functies oplossen;
- herleiden van een logaritmische functie naar een exponentiële functie.

Voorkennis

- werken met logaritmische functies;
- de eigenschappen van logaritmen gebruiken.

Verkennen

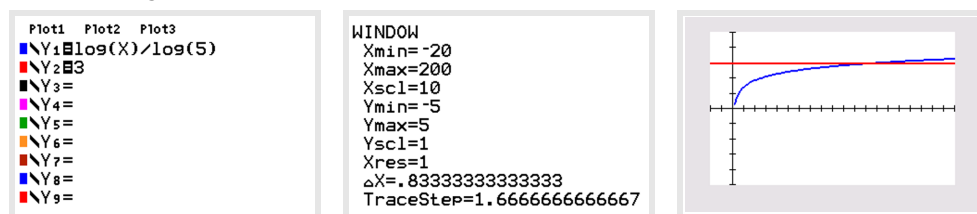
Opgave V1

Los op: ${}^5\log(x) < 3$.

Uitleg

Los op: ${}^5\log(x) < 3$.

- Los de bijbehorende vergelijking op:
 ${}^5\log(x) = 3$ geeft $x = 5^3 = 125$.
- Plot de grafieken op de grafische rekenmachine:
Voer in: $y_1 = {}^5\log(x)$ en $y_2 = 3$.
Dit geeft: $x < 125$.
- Controleer het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme en geef de oplossing. De oplossing is $0 < x < 125$.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^2\log(x) + 16$.

- Plot de grafiek van f .
- Bepaal met de grafische rekenmachine voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$. Rond af op twee decimalen.
- Bepaal algebraïsch voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 2 \log(x) + 16$.

- Bepaal de asymptoot, het domein en het bereik van f .
- Los de ongelijkheid $3 \cdot 2 \log(x) + 16 \leq 38$ op.
Lees de oplossing van de ongelijkheid af uit de grafiek van f .

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **logaritmische vergelijking** $g \log(x) = a$ moet gelden:
 $g > 0$ en $g \neq 1$ en $a > 0$.

De oplossing vind je door aan beide zijden de inverse bewerking van de logaritme toe te passen:

$g \log(x) = a$ geeft $g^{g \log(x)} = g^a$ en hieruit volgt $x = g^a$.

Een **logaritmische ongelijkheid** van de vorm $g \log(x) < a$ kun je zo oplossen:

- Los de bijbehorende vergelijking $g \log(x) = a$ op.
- Plot de grafieken op de grafische rekenmachine van $y_1 = g \log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af. Let op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.

Bij ingewikkelde vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig. Soms moet je van grondtal wisselen.

Voorbeeld 1

Los op: $10 + 7 \cdot 3 \log(x + 1) \leq 45$.

Antwoord

Los bijbehorende vergelijking op: $10 + 7 \cdot 3 \log(x + 1) = 45$.

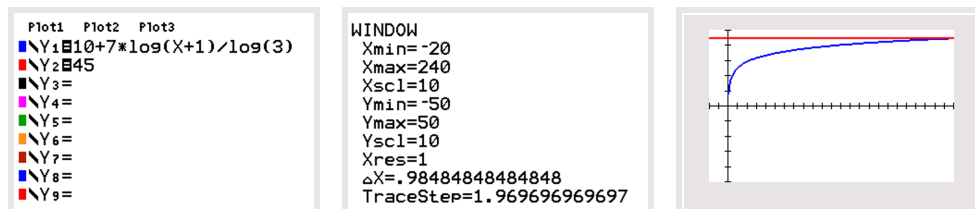
$$\begin{aligned} 3 \log(x + 1) &= 5 \\ x + 1 &= 3^5 \\ x &= 242 \end{aligned}$$

Plot de grafieken op de grafische rekenmachine:

Voer in: $y_1 = 10 + 7 \cdot 3 \log(x + 1)$ en $y_2 = 45$.

Gebruik het domein $\langle -1, \rightarrow \rangle$, de asymptoot $x = -1$ en $y_2 = 45$ om de vensterinstellingen te bepalen.

Lees af: $-1 < x \leq 242$.



Figuur 3

Opgave 3

Los op: $2 + 3 \cdot 2 \log(x - 4) \leq 11$.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot 0,5 \log(x + 5)$.

- a Los algebraïsch op: $f(x) = -3$
- b Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f en bepaal het domein en bereik van f .
- c Los op: $f(x) \geq -3$.

Opgave 5

Plot de grafieken van de functies $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^2\log(2 - x)$.

- a Bepaal van beide functies de vergelijking van de asymptoot.
- b Bepaal van beide functies het domein.
- c Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$
- d Los op: $f(x) > g(x)$.

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: ${}^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) = 3$.

Antwoord

$$\begin{aligned} {}^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) &= 3 \\ {}^2\log(x(x + 2)) &= 3 \\ {}^2\log(x^2 + 2x) &= 3 \\ x^2 + 2x &= 2^3 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ x &= -4 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Vanwege het domein van de eerste logaritme geldt $x > 0$. Alleen de oplossing $x = 2$ voldoet hieraan en dit is de enige oplossing.

Opgave 6

Los algebraïsch op: ${}^6\log(x) + {}^6\log(x - 1) = 1$.

Opgave 7

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- a $\log(2x) - \log(x - 1) = 2$
- b ${}^3\log(x - 2) = 1 + 5 \cdot {}^3\log(2)$

Voorbeeld 3

Het verband tussen het geluidsdrumniveau L en de effectieve geluidsdruk p is

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right), \text{ met } p_0 = 0,00002 \text{ Pa, de gehoorgrens.}$$

Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Vul eerst $p_0 = 0,00002$ in. Herleid vervolgens de gegeven formule naar de vorm $p = \dots$

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0,00002}\right)$$

$$\frac{L}{20} = \log\left(\frac{p}{0,00002}\right)$$

$$10^{\frac{1}{20}L} = \frac{p}{0,00002}$$

$$p = 0,00002 \cdot 10^{\frac{1}{20}L}$$

Omdat $10^{\frac{1}{20}L} \approx 1,12^L$ kun je dit schrijven als: $p = 0,00002 \cdot 1,12^L$.
 p is een exponentiële functie van L .

Opgave 8

Herleid de gegeven formule naar de vorm $q = \dots$

a $h = 300 \cdot \log\left(\frac{q}{5} + 20\right)$

b $h = 10 - 5 \cdot {}^2\log(q - 4)$

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

- a** Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f .
- b** Geef het domein en bereik van f .
- c** Los algebraïsch op: $f(x) > 0$

Opgave 10

Gegeven is de functie $g(x) = -10 + 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x - 1)$.

- a** Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van g .
- b** Geef D_g en B_g .
- c** Los algebraïsch op: $g(x) \geq -14$.

Opgave 11

Los algebraïsch op.

- a** ${}^3\log(x) = 2 \cdot {}^3\log(5)$
- b** ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2)$
- c** $5 - {}^2\log(x) = 0$
- d** ${}^5\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^5\log(3)$
- e** ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2 - x)$
- f** ${}^5\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^5\log(x)$

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = -1 + \log(4 - x)$.

- Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.
- Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$
- Los op: $f(x) \leq g(x)$.
- Los op: $f(x) > g(x)$.

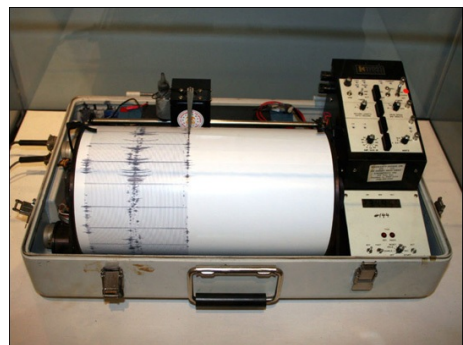
Opgave 13

Druk q uit in p .

- $p = 15 - {}^3\log(5 - q)$
- $p = 600 + 15 \cdot \log\left(\frac{q}{200}\right)$

Toepassen

Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. Verspreid over de aarde staan veel seismografen opgesteld. De uitwijking van een seismograaf hangt af van de afstand van dit instrument tot de plaats aan de oppervlakte van de aarde waar de beving het eerst optreedt. Deze plaats noemt men het epicentrum van de aardbeving. Om aardbevingen met elkaar te kunnen vergelijken gebruikt men seismogrammen die op een afstand van 100 km van het epicentrum zijn gemaakt (standaard seismogrammen). De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Bij deze schaal wordt de logaritme (met grondtal 10) gebruikt van de grootste uitwijking in micrometer die in het seismogram voorkomt.



Figuur 4

Opgave 14

Bekijk het verhaal van de schaal van Richter.

- Leg uit, dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitwijking van de seismograaf 10 keer zo groot wordt.
De aardbeving in Nederland van 13 april 1992 had een kracht van 5,5 op de schaal van Richter. De kracht van de aardbeving op 27 februari 2010 in Chili was 8,8.
- Bereken de verhouding tussen deze twee grootste uitwijkingen.

Opgave 15

Als op een bepaald waarnemingsstation een seismogram gemaakt is en je weet de plaats van het epicentrum, dan kun je met de volgende formule de kracht van de aardbeving berekenen:

$$R = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1,66 \cdot \log(D) + 3,30$$

Hierin is:

- R de kracht van de aardbeving uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter
- A de grootste uitwijking in het seismogram in μm ($1\mu\text{m} = 0,001\text{ mm}$)
- T de tijd in seconden van de trilling met de grootste uitwijking
- D de grootte in graden van de hoek tussen de verbindingslijnstukken ME en MW , waarin M het middelpunt van de aarde, E het epicentrum van de aardbeving en W de plaats van het waarnemingsstation is

Uit de formule volgt inderdaad dat de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt als de maximale uitslag van de seismograaf 10 keer zo groot wordt (bij dezelfde T en D).

a Toon dit aan.

Van de Chileense aardbeving van 2010 werd een seismogram opgenomen. De trillingen gaven daar een maximale uitslag van $1500 \mu\text{m}$; de trillingstijd T bedroeg 20 s. Na invulling van D werd $R = 8,8$ gevonden. Neem aan dat de omtrek van de aarde 40000 km is.

b Bereken de afstand over de aardbol tussen de plaats waar het seismogram werd opgenomen en het epicentrum in Chili in honderden kilometers nauwkeurig.

Ook op diverse andere plaatsen werd in 2010 een seismogram van de Chileense aardbeving opgenomen. Op al die plaatsen berekende men dat de kracht van de aardbeving 8,8 was.

c Toon aan dat hieruit volgt dat tussen A , T en D een verband bestaat van de vorm: $D = p \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^q$ en bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Los algebraïsch op:

- a** ${}^7\log(x - 5) = 0$
- b** $-0,25 \log(x) = 0,25 \log(5)$
- c** ${}^4\log(x) = 0,5 - {}^4\log(3)$
- d** $\frac{1}{2} \log(x) + \frac{1}{2} \log(2x) = 0$

Opgave 17

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^3\log(2x)$ en $g(x) = {}^3\log(6 - x)$.

- a** Bepaal het domein, bereik en de asymptoot van beide functies.
- b** Bereken voor welke x geldt $f(x) = -2$.
- c** Los algebraïsch op: $f(x) > 9$.
- d** Bereken voor welke x geldt $g(x) = 0$.
- e** Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.
- f** Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 18

De formule $k = 4 \cdot \log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5$ is zo te herschrijven dat D een exponentiële functie is van k .

Toon dat aan.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van logaritmische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
