

6.3 Logaritmische functies

Inleiding

Logaritmen ontstaan als inverse bewerking van exponentiële functies. Ook met logaritmen kun je functievoorschriften maken. Het prototype is de functie $f(x) = {}^g \log(x)$. Alle functies die hieruit door de bekende transformaties kunnen ontstaan noem je logaritmische functies. En die ga je nu bekijken...

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische functies te werken;
- de karakteristieken van logaritmische functies te bepalen.

Voorkennis

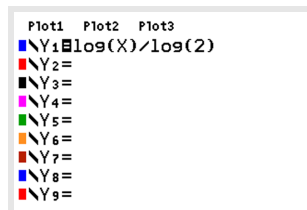
- werken met exponentiële functies;
- transformaties van functies toepassen;
- werken met logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

Op je grafische rekenmachine kun je de grafiek van $f(x) = {}^2 \log(x)$ in beeld brengen. Je voert dan in: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(2)}$ of $y_1 = \log_2(x)$.

- Welke asymptoot heeft de grafiek van f ?
- Breng de grafiek in beeld. Welk domein en welk bereik heeft de functie?
- Bekijk de tabel. Bij welke waarden van x krijg je gehele functiewaarden?



Figuur 1

Uitleg

Bekijk de applet: logaritmische functies

Bekijk hoe de grafiek van de functie $y_1 = 2^x$ samenhangt met die van $y_2 = {}^2 \log(x)$.

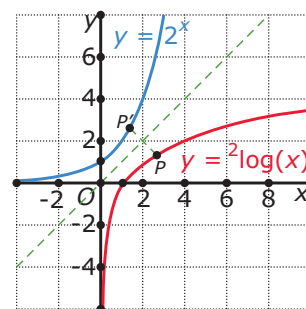
Er geldt: als je y_1 weet, kun je x berekenen.

Invullen van bijvoorbeeld $y_1 = 8$ geeft: $8 = 2^x$.

De oplossing daarvan is: $x = {}^2 \log(8) = 3$.

Hieruit volgt dat je x kunt berekenen uit y_1 met: $x = {}^2 \log(y_1)$.

Vergelijk dit met $y_2 = {}^2 \log(x)$: het enige verschil is dat y en x zijn verwisseld. De grafiek van $y_2 = {}^2 \log(x)$ is de grafiek van $y_1 = 2^x$, maar dan gespiegeld in de lijn $y = x$.



Figuur 2

De karakteristieken van een logaritmische functie zijn daarom af te leiden uit die van een exponentiële functie (met hetzelfde grondtal) door x en y te verwisselen. Beide functies $y = g^x$ en $y = {}^g \log(x)$ zijn elkaars inverse functie.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het verband tussen de grafieken van $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

- Plot beide grafieken.
- Het punt (4,2) ligt op de grafiek van y_2 . Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?
- Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1 .
- Welke verband bestaat er tussen het bereik van y_1 en het domein van y_2 ?

Opgave 2

Plot de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = \frac{1}{2}\log(x)$.

De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1 .

- Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie y_2 .
- Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?
- Voor welke waarden van x geldt $y_2 > 2$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: logaritmische functies

Een functie van de vorm $f(x) = {}^g\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

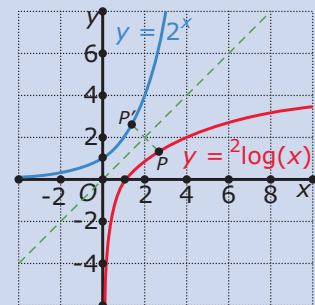
g is het grondtal. Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn elkaars **inverse functie** en dus elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De karakteristieken van $y = {}^g\log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^x$:

- het domein is $\langle 0, \infty \rangle$;
- het bereik is $\mathbb{R}$;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend;
- de y -as is de verticale asymptoot van de grafiek.

Alle functies die door transformatie uit $y = {}^g\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.



Figuur 3

Voorbeeld 1

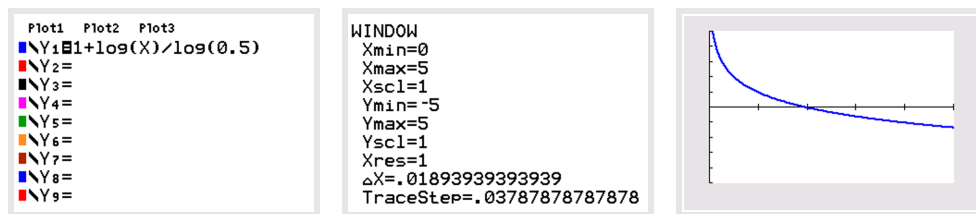
Bepaal de karakteristieken van de logaritmische functie $f(x) = 1 + {}^{0,5}\log(x)$ en bereken het nulpunt van f . Leg uit waarom deze functie dezelfde grafiek heeft als $g(x) = 1 - {}^2\log(x)$.

Antwoord

De grafiek van f kan uit de grafiek van $y = {}^{0,5}\log(x)$ ontstaan door deze 1 eenheid ten opzichte van de x -as te verschuiven.

Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend.

- $x > 0$ en hieruit volgt $D_f = \langle 0, \infty \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.
- De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.



Figuur 4

Bereken het nulpunt.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 0,5 \log(x) &= -1 \\ x &= (0,5)^{-1} = 2 \end{aligned}$$

Deze functie f is dezelfde als functie g omdat:

$$0,5 \log(x) = \frac{2 \log(x)}{2 \log(0,5)} = \frac{2 \log(x)}{-1} = -2 \log(x)$$

Opgave 3

Plot de grafiek van functie $f(x) = {}^3 \log(x)$ op de grafische rekenmachine.

- Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f .
- Voor welke waarde van x is $f(x) = 2$?
- Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 2$?
- Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 2$?

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 2 \cdot {}^{0,3} \log(x - 1)$.

- Geef de vergelijking van de verticale asymptoot.
- Bepaal het domein en bereik van f .
- Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,3} \log(x)$?
- Bereken algebraïsch het nulpunt van f . Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

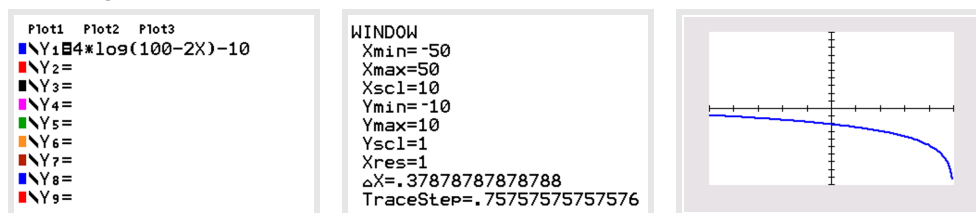
Bepaal de karakteristieken van de logaritmische functie $f(x) = 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10$ en bereken het nulpunt van f .

Antwoord

Door de grote getallen is het verstandig om systematisch de karakteristieken te zoeken.

- $100 - 2x > 0$ geeft: $D_f = \langle -, 50 \rangle$. Bepaal hiermee de vensterinstellingen van de grafische rekenmachine voor de x -as.
- De verticale asymptoot is $x = 50$, de grens van het domein.
- Het bereik is $B_f = \mathbb{R}$, want deze functie kan ontstaan uit $y = \log(x)$, de standaard 10-logaritme.

Plot de grafiek.



Figuur 5

Bereken het nulpunt.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10 = 0 \\ \log(100 - 2x) &= 2,5 \\ (100 - 2x) &= 10^{2,5} \end{aligned}$$

Daaruit volgt: $x \approx -108,11$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 2 + 3 \cdot {}^2\log(3x + 4)$.

- Geef de vergelijking van de verticale asymptoot.
- Bepaal het domein en bereik van f .
- Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^2\log(x)$?
- Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f . Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 3

De effectieve geluidsdruk p (in pascal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ Nm}^{-2}$ dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer $0,00002 \text{ Pa}$, de pijngrens bij 200 Pa . Daarom voerde **Alexander Graham Bell** een praktischere grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel, dB. Het verband tussen L en p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$. Hierin is $p_0 = 0,00002 \text{ Pa}$, de gehoorrens. Hoe groot is de effectieve geluidsdruk van een rijdende bromfiets (75 dB)? Hoeveel dB bedraagt het geluidsdrukniveau van twee van die brommers?

Antwoord

Voor de rijdende bromfiets geldt: $L = 75$ en dus $75 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0,00002}\right)$. Hieruit volgt:

$$p = 0,00002 \cdot 10^{\frac{75}{20}} \approx 0,1125 \text{ Pa}.$$

Heb je twee van die rijdende brommers, dan is hun totale effectieve geluidsdruk ongeveer $2 \cdot 0,1125 = 0,2250 \text{ Pa}$. Daarbij hoort een geluidsdrukniveau van ongeveer

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{0,2250}{0,00002}\right) \approx 81 \text{ dB}.$$

Opgave 6

Gegeven is de formule $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$. De effectieve geluidsdruk p (in pascal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ Nm}^{-2}$ dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies; $p_0 = 0,00002 \text{ Pa}$; de gehoorrens; L is het geluidsdrukniveau uitgedrukt in decibel, dB.

- In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?
- Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drillboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?
- Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = {}^5\log(2x + 5) - 1$.

- a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van f .
- b Bereken het nulpunt van f .

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x + 4)$.

- a Geef de vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f .
- b Geef het domein en bereik van f .
- c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?
- d Bereken algebraïsch het nulpunt van f . Rond af op één decimaal.

Opgave 9

De grafieken van de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $g(x) = 2^x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de

y -as. De grafieken van de functies $h(x) = \frac{1}{2} \log(x)$ en $k(x) = {}^2\log(x)$ moeten dan elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de x -as. Dat wil zeggen dat $h(x) = -k(x)$.

- a Voor welke waarde van x is $h(x) = 3$?
- b Voor welke waarde van x is $k(x) = -3$?
- c Het punt $\left(\frac{1}{8}, 3\right)$ op de grafiek van h heeft een spiegelbeeld op de grafiek van k . Wat zijn de coördinaten van dit spiegelbeeld?
- d Geef nog een punt op de grafiek van h en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van k .
- e Plot de grafieken van h en k in één figuur en los op: $h(x) = k(x)$.
- f Toon nu aan dat $h(x) = -k(x)$ voor willekeurige $x > 0$.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^2\log(2 - x)$.

- a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functies f en g .
- b De grafiek van de functie g ontstaat door transformatie uit die van f . Beschrijf de transformaties in de juiste volgorde.
- c Plot de grafieken van de functies f en g en los op: $f(x) = g(x)$.
- d In welke lijn zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld?

Opgave 11

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3} \log(2x)$ en $g(x) = {}^3\log(3x + 9) - 1$.

- a Hoe kan de grafiek van g door transformaties uit de grafiek van f ontstaan?
- b De grafiek van f snijdt de x -as in punt P en de grafiek van g snijdt de y -as in punt Q . Bereken exact de lengte van PQ .

Toepassen

Opgave 12: Lichtgevoeligheid

Lichtgevoeligheid van fotografisch opnamemateriaal wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ASA-systeem (American Standards Association). Op filmrolletjes staat meestal ook een ander gevoeligheidsgetal vermeld, de DIN-waarde. Het verband tussen ASA en DIN wordt gegeven door de formule

$$y = 1 + a \cdot \log(x)$$

Hierin geeft x de lichtgevoeligheid in ASA aan en y de lichtgevoeligheid in DIN. Een film van 100 ASA heeft een DIN-waarde 21.



Figuur 6

- Bereken a .
- Maak de grafiek. De meeste films hebben een ASA-waarde tussen 50 en 1000.
- Hoeveel ASA heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?
- Je kunt de gegeven formule ook herleiden naar de vorm $x = b \cdot 10^{ky}$. Bereken b en k .

Opgave 13: Schaal van Richter

Een bekende maat voor de sterkte van een aardbeving is de magnitude op de schaal van Richter. Daarvoor geldt bij benadering:

$$m = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$$

Hierin is:

- m de magnitude op de schaal van Richter
- E de energie in Joule

- Laat zien, dat deze formule is te schrijven als $E = a \cdot 10^{k \cdot m}$.
- Op 23 augustus 2018 werd Bali getroffen door een aardbeving met een magnitude van 5,2 op de schaal van Richter. Hoe groot bedroeg de hoeveelheid vrijgekomen energie?

Testen

Opgave 14

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2,4$ (in één decimaal nauwkeurig).

Mark (8 jaar) en Helen (10 jaar) wonen in Nederland en zijn wat lengte en gewicht betreft gemiddelde Nederlandse kinderen.

- Mark heeft een lengte van 1,30 m en weegt 26,3 kg. Bereken k in gehelen nauwkeurig.
- Helen is 1,40 m lang. Schat haar gewicht in kg.

Opgave 15

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = \frac{1}{3} \log(2x)$ en $g(x) = {}^3\log(3x - 6)$.

- Bepaal het domein, bereik en asymptoot van f en plot de grafiek van f .
- Door middel van welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = \frac{1}{3} \log(x)$?

- c Bepaal het domein, bereik en asymptoot van g en plot de grafiek van g .
- d Door middel van welke transformaties kan de grafiek van g ontstaan uit die van $y = {}^3\log(x)$?
- e Los op in drie decimalen nauwkeurig: $f(x) = g(x)$.
- f De grafiek van f snijdt de x -as in punt A en de grafiek van g snijdt de x -as in punt B . Bereken de lengte van lijnstuk AB .

Practicum: Logaritmische functies

Met deze applet maak je logaritmische functies. Verzin zo'n functie, bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = {}^g\log(x)$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

[Werk met de applet logaritmische functies](#)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
