

## 6.2 Eigenschappen

### Inleiding

Je hebt nu wel het begrip logaritme leren kennen als oplossing van een exponentiële vergelijking, maar nog geen methode gezien om willekeurige logaritmen rechtstreeks te bepalen (benaderen) met de rekenmachine. Er zit wel een functie [LOG] op, maar daarmee kun je nog niet op alle rekenmachines voor elk willekeurig grondtal de logaritme van een getal vinden. Je hebt de eigenschappen van logaritmen nodig. Die ga je nu nader bekijken.

#### Je leert in dit onderwerp

- eigenschappen van logaritmen gebruiken;
- logaritmen benaderen met de grafische rekenmachine.

#### Voorkennis

- werken met het begrip logaritme;
- logaritmen bepalen vanuit exponentiële vergelijkingen.

### Verkennen

#### Opgave V1

Je weet dat  $g^x = y$  gelijkwaardig is met  $x = {}^g\log(y)$ . Dat levert alvast twee eigenschappen van logaritmen op.

- Hoe volgt hier uit dat  ${}^g\log(g^x) = x$ ?
- Welke andere eigenschap volgt hier rechtstreeks uit?
- Klopt de bewering  ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a + b)$ ?

#### Uitleg 1

Voor het saldo  $S$  op een spaarrekening  $t$  jaar na een eenmalige storting van € 4000,00 en een jaarlijkse rente van 2% geldt:  $S(t) = 4000 \cdot 1,02^t$ .

Hieruit volgt dat de tijd die nodig is om het saldo te laten verdubbelen wordt gegeven door:  $1,02^t = 2$ .

De verdubbelingstijd is  ${}^{1,02}\log(2) \approx 35,0$  jaar.

De verdrievoudigingstijd is  ${}^{1,02}\log(3) \approx 55,5$  jaar.

De verzesvoudigingstijd is  ${}^{1,02}\log(6) \approx 90,5$  jaar.

De verzesvoudigingstijd vind je ook door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen. Er geldt:  ${}^{1,02}\log(2) + {}^{1,02}\log(3) = {}^{1,02}\log(6)$ .

Ofwel:  ${}^{1,02}\log(2) + {}^{1,02}\log(3) = {}^{1,02}\log(2 \cdot 3)$ .

Als je twee logaritmen optelt, moet je de getallen waarop ze werken vermenigvuldigen.

De verachtvoudigingstijd van het saldo is  ${}^{1,02}\log(8)$ . Die verachtvoudigingstijd vind je ook door drie keer de verdubbelingstijd te nemen.

$$3 \cdot {}^{1,02}\log(2) \approx 105,0$$

$${}^{1,02}\log(8) \approx 105,0$$

Er geldt:  $3 \cdot {}^{1,02}\log(2) = {}^{1,02}\log(2^3)$ .

Als je een logaritme met een getal vermenigvuldigt, wordt dit getal de exponent van het getal waarop de logaritme werkt.

### Opgave 1

Piet heeft een geldbedrag van € 4000,00 op de bank. De rente is 1% per jaar.

- Hoelang duurt het voor het saldo twee keer zo groot is? Geef het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme in één decimaal.
- Hoelang duurt het voor het saldo drie keer zo groot is? Geef het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme in één decimaal.
- Hoelang duurt het voor het saldo zes keer zo groot is? Geef het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme in één decimaal.
- Trek het antwoord op b af van het antwoord op c, dan volgt het antwoord op a. Controleer dit en geef een verklaring.
- Schrijf de eigenschap van logaritmen op die volgt uit het antwoord bij d.

### Opgave 2

Bij exponentiële afname komt het begrip halveringstijd voor.

- Geef een omschrijving van het begrip halveringstijd. Gebruik een logaritme.
- In een bepaalde situatie neemt de hoeveelheid jaarlijks met 7% af. Bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.
- De radioactieve stof strontium heeft een halveringstijd van 28 jaar. Bereken in drie decimalen de groeifactor per jaar.

### Uitleg 2

Het kost veel tijd om  ${}^2\log(100)$  te berekenen door  $2^x = 100$  op te lossen met de grafische rekenmachine. Het kan ook anders. De rekenmachine kent een knop logaritme, die werkt met grondtal 10.

$x = {}^2\log(100)$  is de oplossing van de vergelijking  $2^x = 100$ .

Neem aan beide zijden van de vergelijking de  ${}^{10}\log$ :

$$\begin{aligned} {}^{10}\log(2^x) &= {}^{10}\log(100) \\ x \cdot {}^{10}\log(2) &= {}^{10}\log(100) \\ x &= \frac{{}^{10}\log(100)}{{}^{10}\log(2)} \end{aligned}$$

Dit werkt ook voor andere grondtallen dan 2 en 10.

Bereken met de grafische rekenmachine  ${}^2\log(100)$  met de knop logaritme. Deze knop werkt automatisch met grondtal 10:

$${}^2\log(100) = \frac{\log(100)}{\log(2)} \approx 6,64$$

De meeste grafische rekenmachines hebben ook de mogelijkheid om het grondtal van de logaritme direct in te voeren. Vaak wordt dan wel de Amerikaanse notatie  $\log_g(x)$  gebruikt. Daarin krijgt het grondtal een andere plaats.

### Opgave 3

- In **Uitleg 2** zie je dat  ${}^{10}\log(2^x) = {}^{10}\log(100)$  volgt:  $x = \frac{{}^{10}\log(100)}{{}^{10}\log(2)}$ . Bereken op dezelfde manier  ${}^3\log(300)$ .
- Bereken  $\log(100)$  op de grafische rekenmachine. Wat is het grondtal van de knop logaritme?

#### Opgave 4

Bereken. Rond je antwoord af op twee decimalen.

- a  $^4\log(15)$
- b  $^{15}\log(4)$
- c  $^3\log(-9)$
- d  $^{0,2}\log(5)$
- e  $^{0,2}\log(0,1)$
- f  $^6\log(1)$

### Theorie en voorbeelden

#### Om te onthouden

Een definitie van **logaritme** is:

$x = {}^g\log(y)$  is de oplossing van  $g^x = y$ .

Uit de definitie van logaritme volgt dat  $g^x$  en  ${}^g\log(x)$  elkaars terugrekenfunctie zijn. Er geldt dan ook:

$${}^g\log(g^x) = x \text{ en } g^{^g\log(y)} = y$$

Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$
- ${}^g\log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$

${}^g\log(a)$  kan berekend worden met de rekenmachine. Soms wordt er op de rekenmachine een andere notatie gehanteerd, waarbij het grondtal rechts onder de log staat:  $\log_g(a)$ .

Het grondtal 10 laat je vaak weg:  $^{10}\log(a) = \log(a)$ .

Let op! Controleer of, en zorg dat bij gebruik van de logaritme  ${}^g\log(y)$  geldt:

$0 < g < 1$  of  $g > 1$  en  $y > 0$ .

#### Voorbeeld 1

Door de eigenschappen van logaritmen kun je ermee rekenen en uitdrukkingen herleiden. Bijvoorbeeld:

- ${}^6\log(24) + 2 \cdot {}^6\log(3) = {}^6\log(24) + {}^6\log(3^2) = {}^6\log(24 \cdot 9) = {}^6\log(216) = 3$
- ${}^2\log(12) + {}^{0,5}\log(12) = {}^2\log(12) + \frac{{}^2\log(12)}{{}^2\log(0,5)}}{{}^2\log(0,5)}} = {}^2\log(12) - {}^2\log(12) = 0$   
want  ${}^2\log(0,5) = {}^2\log(2^{-1}) = -1$
- ${}^2\log(7) \cdot {}^7\log(8) = \frac{\log(7)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(8)}{\log(7)} = \frac{\log(8)}{\log(2)} = {}^2\log(8) = 3$
- $2^{^2\log(7)} = 7$
- ${}^5\log(7) + {}^3\log(9) = {}^5\log(7) + 2 = {}^5\log(7) + {}^5\log(25) = {}^5\log(175)$

#### Opgave 5

Bereken de logaritmen en controleer of de uitdrukkingen waar zijn.

- a  ${}^2\log(16) + {}^2\log(8) = {}^2\log(128)$
- b  ${}^2\log(16) - 3 \cdot {}^2\log(2) = {}^2\log(2)$
- c  ${}^3\log(3) + {}^3\log(9) = {}^3\log(81)$

### Opgave 6

Bereken met behulp van de eigenschappen van logaritmen.

**a**  ${}^2\log(72) - 2 \cdot {}^2\log(3)$

**b**  ${}^2\log(80) + {}^{0,5}\log(5)$

Schrijf als één logaritme.

**c**  ${}^2\log(7) + {}^3\log(81)$

**d**  $0,5 \cdot {}^2\log(36) - 1$

### Voorbeeld 2

Los de vergelijking  $2^t = 20000$  op met behulp van de knop logaritme van de grafische rekenmachine. Rond af op één decimaal.

Antwoord

$2^t = 20000$  heeft als oplossing  $t = {}^2\log(20000)$ .

Met de grafische rekenmachine kun je op twee manieren het antwoord bepalen:

- $t = \frac{\log(20000)}{\log(2)} \approx 14,3$

- $t = {}^2\log(20000) \approx 14,3$

(Als de rekenmachine beschikt over een optie waarin je ook het grondtal van de logaritme kunt invoeren.)

### Opgave 7

Los de vergelijkingen op de volgende manieren op:

1. Benader  $x$  door het in te voeren op de grafische rekenmachine en de grafieken af te lezen.
2. Geef  $x$  exact met een logaritme, en geef aan hoe je dit logaritme in zou voeren op de grafische rekenmachine.

**a**  $3^x = 8100$

**b**  $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 0,002$

### Voorbeeld 3

Los de vergelijking  ${}^2\log(x) = 3$  algebraïsch op.

Antwoord

Gebruik de regel dat de logaritme de inverse bewerking is van een exponentiële functie met hetzelfde grondtal. Neem aan beide zijden de exponentiële functie met grondtal 2. Dit geeft:

$$2^{2\log(x)} = 2^3$$

En omdat  $2^{2\log(x)} = x$  volgt:  $x = 2^3 = 8$ .

### Opgave 8

Los algebraïsch op.

**a**  ${}^5\log(x) = 2$

**b**  ${}^4\log(2x) = 0$

**c**  $\frac{1}{4}\log(x^2) = -4$

**d**  ${}^2\log(\sqrt{x}) = 5$

### Voorbeeld 4

Los de vergelijking  $\log(x) + \log(2x) = 3$  algebraïsch op.

Antwoord

$$\begin{aligned}\log(x) + \log(2x) &= 3 \\ \log(2x^2) &= 3 \cdot \log(10) \\ \log(2x^2) &= \log(1000) \\ 2x^2 &= 1000 \\ x &= -\sqrt{500} \vee x = \sqrt{500}\end{aligned}$$

Omdat je geen logaritme uit een negatief getal kunt trekken, is er maar één oplossing mogelijk:  
 $x = \sqrt{500}$ .

### Opgave 9

Los algebraïsch op.

- a  $\log(5x) + \log(x) = 1$
- b  $2 \cdot \log(x) - \log(2x) = 2$

### Verwerken

### Opgave 10

Bereken.

- a  $^{10}\log(5) + ^{10}\log(20)$
- b  $^5\log(100) - ^5\log(4)$
- c  $2 \cdot ^6\log(3) + ^6\log(4)$
- d  $^{\frac{1}{3}}\log(45) - ^{\frac{1}{3}}\log(5)$

### Opgave 11

Ga na welke logaritmen eenvoudig zonder grafische rekenmachine te berekenen zijn. Geef van die opgaven het exacte antwoord. Bereken van de overige opgaven het antwoord tot op drie decimalen.

- a  $^5\log(625)$
- b  $^2\log(100)$
- c  $^7\log(\sqrt{7})$
- d  $\log(40) + \log(25)$
- e  $\log(40) - \log(12)$
- f  $^{\frac{1}{3}}\log(0,0003)$

### Opgave 12

Een radioactieve stof vervalst volgens deze formule:  $N(t) = N(0) \cdot 0,93^t$   
 $N$  is de hoeveelheid in milligram en  $t$  de tijd in jaar.

- a Bereken de halveringstijd. Rond af op twee decimalen.
- b Een laboratorium heeft 400 gram van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt voordat deze hoeveelheid minder is geworden dan 50 gram. Rond af op één decimaal.
- c Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt voordat 50 gram van deze stof minder is geworden dan 10 gram.

### Opgave 13

Het radioactieve calcium-45 heeft een halveringstijd van 165 dagen.

- a Na hoeveel tijd is er van een willekeurige beginhoeveelheid calcium-45 nog  $\frac{1}{4}$  deel over?
- b Na hoeveel tijd is er van een willekeurige beginhoeveelheid calcium-45 nog  $\frac{1}{8}$  deel over?
- c In een laboratorium is 100 gram calcium-45 aanwezig. Schat met behulp van de antwoorden bij a en b hoelang het duurt tot deze hoeveelheid minder is geworden dan 15 gram.
- d Bereken tot op een dag nauwkeurig hoelang het duurt voordat de beginhoeveelheid van 100 gram is afgenomen tot 15 gram.

### Opgave 14

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op één decimaal.

- a  $10 \cdot 5^x = 0,16$
- b  $8 \cdot 3^x = 0,056$
- c  ${}^3\log(x^2) = 3$
- d  ${}^4\log(x + 1) = 3$

### Opgave 15

Een hoeveelheid groeit exponentieel met groeipercentage  $p$  procent.

Toon aan dat de verdubbelingstijd  $T$  wordt gegeven door:

$$T = \frac{\log(2)}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

## Toepassen

### Opgave 16: Logaritmentabel

Wanneer de uitkomst van een logaritme geen geheel getal is, wordt de waarde vaak berekend met behulp van de grafische rekenmachine. Vijftig jaar geleden waren er nauwelijks grafische rekenmachines. In die tijd gebruikten scholieren op de middelbare scholen tabellenboekjes om de waarde van een logaritme te bepalen.

In de tabel staat een stukje uit zo'n tabellenboekje met (afgeronde) waarden van logaritmen.

Met behulp van de tabel en de rekenregels voor logaritmen is het mogelijk om logaritmische of exponentiële vergelijkingen op te lossen. Hierbij kun je een benadering van het antwoord vinden, zonder de knop logaritme van de grafische rekenmachine te gebruiken.

- a Bereken  $\log(24)$  op algebraïsche wijze met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de knop logaritme op de grafische rekenmachine. Rond af op drie decimalen.
- b Gegeven is de vergelijking  $7^x = 2$ . Los deze vergelijking op algebraïsche wijze op met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de knop logaritme op de grafische rekenmachine. Rond af op drie decimalen.
- c Gegeven is de vergelijking  $7^x = 25$ . Los deze vergelijking op algebraïsche wijze op met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de knop logaritme op de grafische rekenmachine. Rond af op drie decimalen.

| $n$  | $\log(n)$ |
|------|-----------|
| 1    | 0         |
| 2    | 0,3010    |
| 3    | 0,4771    |
| 4    | 0,6021    |
| 5    | 0,6990    |
| 6    | 0,7782    |
| 7    | 0,8451    |
| 8    | 0,9031    |
| 9    | 0,9542    |
| 10   | 1         |
| 100  | 2         |
| 1000 | 3         |

Tabel 1

(bron: examen havo wiskunde B in 2011, eerste tijdvak)

## Testen

### Opgave 17

Iemand koopt een huis voor € 200000 en verwacht dat de waarde van het huis per jaar 10% zal stijgen.

- Hoe lang duurt het voordat het huis € 300000 waard is? Schrijf het antwoord als logaritme en bereken die logaritme tot op de maand nauwkeurig.
- Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis twee keer zo groot is geworden?
- Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis drie keer zo groot is geworden?
- Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis zes keer zo groot is geworden? Laat zien hoe je dit kunt berekenen met behulp van de antwoorden bij b en c.
- Hoe kun je het antwoord van vraag d in één keer berekenen?

### Opgave 18

Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord halveringstijd vaak het woord halfwaardetijd gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 g van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

- Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 g van het natrium-24 over is.
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?
- Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 g natrium-24 nog maar 160 g over is.

### Opgave 19

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties? Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

### Opgave 20

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op drie decimalen.

- $600 \cdot 0,5^t = 20$
- ${}^5\log(1 - x) = 2$
- ${}^2\log(4x^2) = 5$



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---