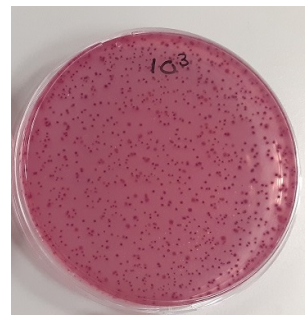


## 6.1 Logaritmen

### Inleiding

Bij exponentiële verbanden zoals die bij bijvoorbeeld bacteriegroei optreden moet je soms vragen beantwoorden als: “Op welk tijdstip heb je 1000 bacteriën?” Daarbij ontstaan vergelijkingen waarin exponentiële functies voorkomen. Die kun je nog niet algebraïsch oplossen, maar alleen oplossingen zoeken (vaak benaderen) met de grafische rekenmachine. In dit onderwerp leer je hoe je logaritmen kunt gebruiken om dergelijke vergelijkingen wel algebraïsch op te lossen.



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme kennen;
- logaritmen uit het hoofd berekenen waar dat kan;
- logaritmen schatten (ook met de grafische rekenmachine);
- oplossingen van exponentiële vergelijkingen schrijven als logaritmen.

### Voorkennis

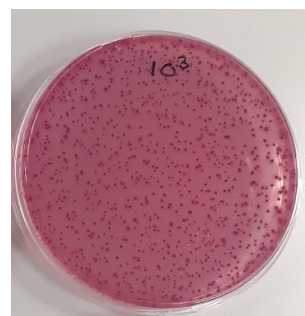
- werken met exponentiële functies, ook met de grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

### Verkennen

#### Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën  $B$  worden gegeven door de formule  $B = 6 \cdot 2^t$  met  $t$  in uren.

Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 1000 bacteriën?



Figuur 2

### Uitleg

De hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Voor een hoeveelheid bacteriën  $B$  in een petrischaaltje geldt  $B = 6 \cdot 2^t$  met  $t$  in uur. Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 120 bacteriën?

Nu moet  $6 \cdot 2^t = 120$ .

Dit geeft:  $2^t = 20$ .

Gebruik de grafische rekenmachine. De oplossing is  $t \approx 4,322$ .

Dit antwoord is afgerond.

De exacte oplossing schrijf je als:  $t = {}^2\log(20)$ .

Dit noem je de 2-logaritme van 20. Let goed op wanneer je logaritmen gebruikt:

De exacte oplossing van de vergelijking  $x^2 = 7$  is:  $x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$ .

De exacte oplossing van de vergelijking  $2^x = 7$  is:  $x = {}^2\log(7)$ .

Een vergelijking van de vorm  $g^x = a$  heeft één oplossing:  $x = {}^g\log(a)$  waarin  $a$  positief is.

## Opgave 1

Los op:  $2^t = 30$ .

- Bepaal de oplossing van deze vergelijking. Rond af op vier decimalen.
- Schrijf de oplossing als logaritme.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

#### Bekijk de applet

De exacte oplossing voor  $x$  van de exponentiële vergelijking  $y = g^x$  heet **logaritme**.

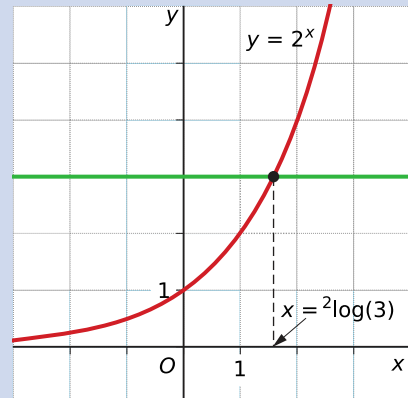
Notatie:  $x = {}^g \log(y)$

Uitspraak: de logaritme van  $y$  voor grondtal  $g$  of korter: de  $g$  log van  $y$ .

$g^x = y$  betekent  $x = {}^g \log(y)$  en omgekeerd.

Exponent en logaritme zijn elkaars omgekeerde of **inverse bewerking**.

Als  $y > 0$ , heeft de vergelijking één oplossing, omdat exponentiële functies altijd stijgend (grondtal groter dan 1) of altijd dalend zijn (grondtal tussen 0 en 1). Als  $y \leq 0$ , dan zijn er geen oplossingen voor de vergelijking  $x = {}^g \log(y)$ .



Figuur 3

### Voorbeeld 1

Luchtschepen zijn gevuld met gas met een lage soortelijke massa. Dat gas staat onder druk en er lekt een klein deel van weg. Een luchtschip met een inhoud van  $3000 \text{ m}^3$  verliest elke tien dagen ongeveer 2% van het gas. Als er minder dan  $2400 \text{ m}^3$  over is, kan het luchtschip niet meer vliegen. Hoeveel dagen kan het luchtschip vliegen als het geheel is gevuld met gas? Geef je antwoord exact met een logaritme, en als een benadering afgerond op twee decimalen.



Figuur 4

Antwoord

De hoeveelheid gas in het luchtschip is  $G(t) = 3000 \cdot 0,98^t$  met  $G$  in  $\text{m}^3$  en  $t$  in eenheden van tien dagen.

Los op:  $3000 \cdot 0,98^t < 2400$

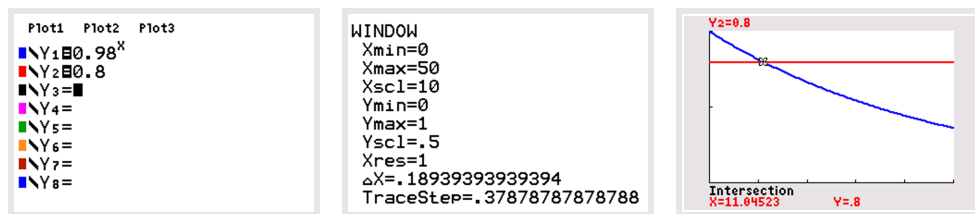
Stappenplan voor het oplossen van  $3000 \cdot 0,98^t = 2400$ :

$$3000 \cdot 0,98^t = 2400$$

$$0,98^t = 0,8$$

$$t = {}^{0,98} \log(0,8) \approx 11,05$$

Gebruik hierbij de optie intersect van de grafische rekenmachine.



**Figuur 5**

Het luchtschip kan 110 dagen vliegen zonder bijvullen. Op dag 111 kan het luchtschip niet meer vliegen.

## Opgave 2

Uit een luchtschip met een inhoud van  $3000 \text{ m}^3$  vervliegt per tien dagen 4% van het gas. Na hoeveel dagen is de inhoud van het luchtschip verminderd tot  $2800 \text{ m}^3$ .

- Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze zo ver mogelijk.
- Geef de oplossing van de vergelijking als logaritme. Geef ook een benadering afgerond op twee decimalen.

### Voorbeeld 2

Soms kun je zonder rekenmachine de waarde van een logaritme bepalen:

- $^2\log(16) = 4$  want  $2^4 = 16$
- $^3\log\left(\frac{1}{9}\right) = -2$  want  $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $^{10}\log(10000) = 4$  want  $10^4 = 10000$
- $^{10}\log(0,001) = -3$  want  $10^{-3} = 0,001$
- $^{\frac{1}{2}}\log(8) = -3$  want  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
- $^3\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = ^3\log\left(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = ^3\log\left(3^{-1\frac{1}{2}}\right) = -1\frac{1}{2}$

## Opgave 3

Bereken de logaritmen zonder grafische rekenmachine.

- $^5\log(125)$
- $^5\log\left(\frac{1}{25}\right)$
- $^4\log(64)$
- $^{\frac{1}{4}}\log(64)$
- $^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$
- $^2\log(\sqrt{2})$

## Opgave 4

Geef de oplossingen van de vergelijkingen als logaritme. Bereken de waarde van de logaritmen. Rond indien nodig af op drie decimalen.

- $3^x = 7$
- $3^x = 27$
- $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$
- $\left(\frac{1}{11}\right)^x = 0,03$

### Voorbeeld 3

Schat de grootte van een logaritme met behulp van machten van het grondtal:

- $^2\log(40)$  is een getal tussen 5 en 6, want  $2^5 = 32$  en  $2^6 = 64$ .
- $^{10}\log(400)$  is een getal tussen 2 en 3, want  $10^2 = 100$  en  $10^3 = 1000$ .
- $^{10}\log(0,05)$  is een getal tussen -2 en -1, want  $10^{-2} = 0,01$  en  $10^{-1} = 0,1$ .
- $^{0,5}\log(20)$  is een getal tussen -5 en -4, want  $0,5^{-5} = 32$  en  $0,5^{-4} = 16$ .

### Opgave 5

Geef zonder rekenmachine te gebruiken van de logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ze liggen.

- a  $^2\log(9)$
- b  $^3\log(20)$
- c  $^5\log(150)$
- d  $^{10}\log(758)$
- e  $^{0,5}\log(60)$
- f  $^2\log\left(\frac{1}{7}\right)$

### Opgave 6

Bereken de logaritmen tot op één decimaal nauwkeurig.

- a  $^2\log(9)$
- b  $^3\log(20)$
- c  $^5\log(150)$
- d  $^{10}\log(758)$
- e  $^{0,5}\log(60)$
- f  $^2\log\left(\frac{1}{7}\right)$

### Opgave 7

Geef de oplossingen van de vergelijkingen als logaritme. Bereken ook de waarde van de logaritmen. Rond indien nodig af op één decimaal.

- a  $5 \cdot 3^x = 3000$
- b  $572 \cdot 0,6^t = 30$

## Verwerken

### Opgave 8

Een aantal van deze logaritmen zijn zonder rekenmachine te berekenen, omdat er gehele getallen uit komen. Bereken deze logaritmen. Benader de overige logaritmen met de rekenmachine tot op één decimaal.

- a  $^4\log(64)$
- b  $^4\log(400)$
- c  $^{\frac{1}{3}}\log(60)$
- d  $^{\frac{1}{3}}\log(81)$
- e  $^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$
- f  $^{0,1}\log(1000000)$

### Opgave 9

Geef een benadering van de logaritmen in drie decimalen.

- a  $2,5 \log(100)$
- b  $0,7 \log(20)$
- c  $2,3 \log(0,05)$
- d  $15,2 \log(2,3)$

### Opgave 10

Geef zonder een rekenmachine te gebruiken van de logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen de waarde ligt.

- a  $6 \log(30)$
- b  $3 \log(70)$
- c  $\frac{1}{2} \log(10)$
- d  $\frac{1}{3} \log(0,01)$

### Opgave 11

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme. Geef daarna indien nodig een benadering in één decimaal.

- a  $10 \cdot 10^x = 0,1$
- b  $0,5 \cdot 2^x = 30$
- c  $54 \cdot 0,8^t = 27$

### Opgave 12

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdrievoudigd. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

### Opgave 13

Een kolonie bacteriën neemt per dag met 20% toe.

- a Bepaal de groeifactor.
- b Een bioloog wil weten na hoeveel dagen het aantal bacteriën is verdubbeld. Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze vergelijking zo ver mogelijk.
- c Schrijf de oplossing van de vergelijking als een logaritme.
- d Het antwoord bij c is de exacte notatie van de oplossing. Bereken met behulp van de grafische rekenmachine na hoeveel dagen dit ongeveer is.

## Toepassen

### Opgave 14: De waarde van een auto

De waarde van een auto neemt exponentieel af. Bij een bepaald merk auto was de afname in de eerste twee jaar € 4750,00. Bij aanschaf kostte de auto € 30000,00.

- a Hoeveel is de groeifactor per jaar? Rond af op drie decimalen.
- b Het verband tussen de waarde  $W$  in euro en het aantal jaren  $j$  na aanschaf heeft de vorm  $W = a \cdot g^j$ . Van welke variabelen in deze formule ken je de waarde?
- c Hoeveel is de auto vijf jaar na de aanschaf nog waard?
- d Bereken hoeveel jaar na de aanschaf de auto voor het eerst minder dan € 10000,00 waard is. Schrijf je antwoord als een logaritme en rond daarna af op gehele jaren.

### Opgave 15: Geld op de bank

Iemand zet op 1 januari 2014 een kapitaal van € 10000,00 op de bank tegen een vaste rente van 3% per jaar. In welke maand van welk jaar is dit kapitaal uitgegroeid tot € 15000,00 als hij er niets afhaalt of bijstort?

- a Welke formule kun je opstellen om het kapitaal te berekenen bij het aantal jaren nadat die persoon het geld op de bank heeft gezet?
- b Welke vergelijking moet je oplossen om antwoord op de vraag te kunnen geven?
- c Bereken het antwoord door gebruik te maken van een logaritme. Rond indien nodig af op twee decimalen.

### Testen

#### Opgave 16

Bereken de volgende logaritmen exact zonder je rekenmachine te gebruiken.

- a  ${}^2\log(\sqrt{32})$
- b  ${}^{\frac{1}{3}}\log(27)$

#### Opgave 17

Geef bij de volgende logaritmen eerst aan tussen welke opeenvolgende gehele getallen ze liggen. Geef daarna een benadering in drie decimalen.

- a  ${}^2\log(513)$
- b  ${}^{0,4}\log(25)$

#### Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

- a  $6 \cdot 4^x = 35$
- b  $1050 \cdot 1,08^t = 1800$

#### Opgave 19

In een tank zit 150 liter verontreinigde vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door spoelen met water. Hierdoor verdwijnt elke minuut 15% van de vloeistof. Men wil stoppen met spoelen als er minder dan 10 liter verontreinigde vloeistof over is.

Bereken hoe lang men moet spoelen. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering van deze logaritme.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

