

5.5 Meer exponentiële functies

Inleiding

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $f(x) = g^x$ met $g > 0$. Alle andere exponentiële functies kunnen uit f ontstaan door transformatie. Ze hebben allemaal de vorm $y = b \cdot g^x + d$. Je zult zien dat deze exponentiële functies wel degelijk nulpunten kunnen hebben...

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties van de functie $f(x) = g^x$ met $g > 0$;
- de karakteristieken van deze exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

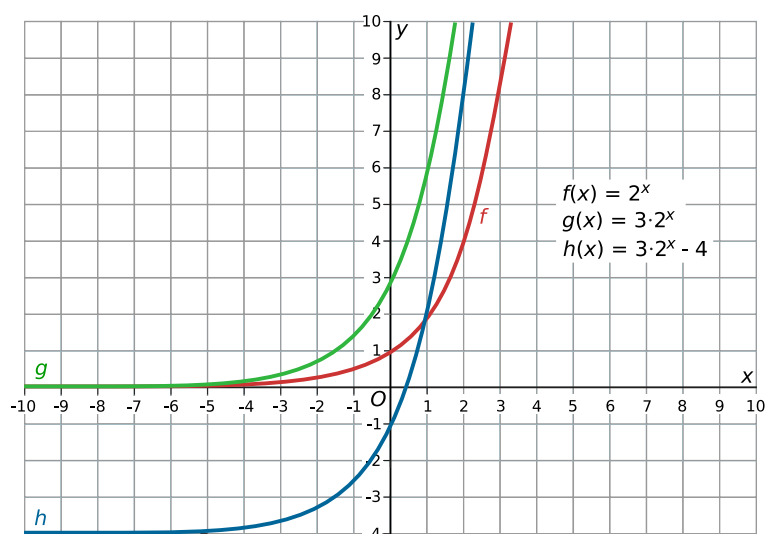
Schrijf de volgende functies in de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

- $y_1 = 1 - 3 \cdot 0,5^x$
- $y_2 = -3 \cdot 0,5^{2x} - 4$
- Waarom zou je dergelijke herleidingen willen?

Uitleg

Bekijk de applet

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Je ziet de grafiek met $g = 2$.



Figuur 1

Alle functies die hieruit door vermenigvuldiging ten opzichte van de assen of een translatie kunnen ontstaan, hebben de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ in te vullen.
De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door ten opzichte van de x -as met 3 te vermenigvuldigen;
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ in te vullen.
De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door ten opzichte van de x -as met 3 te vermenigvuldigen en vervolgens de grafiek -4 eenheden in de y -richting te verschuiven (een translatie van -4 ten opzichte van de x -as);
- $f(x) = 3 \cdot 2^{2x-1} + 4$ kun je herleiden tot $f(x) = 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-1} - 4 = 1,5 \cdot 2^{2x} - 4$.
Dat wordt $f(x) = 1,5 \cdot (2^2)^x - 4$ en dus $f(x) = 1,5 \cdot 4^x - 4$.
De grafiek ontstaat door $b = 1,5$, $g = 4$ en $d = -4$ in te vullen. Dus ontstaat de grafiek uit die van $y = 4^x$ door ten opzichte van de x -as met 1,5 te vermenigvuldigen en vervolgens een translatie ten opzichte van de x -as van -4 eenheden uit te voeren.

Opgave 1

Het gaat in de **Uitleg** over exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

- Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welk functievoorschrift $f_1(x)$ krijg je? Door welke transformaties ontstaan uit de grafiek van f_1 die van $y = 2^x$?
- Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welk functievoorschrift $f_2(x)$ krijg je? Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f_2 door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?
- Neem $b = -10$, $g = 1,5$ en $d = 100$. Welk functievoorschrift $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 2

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = 6 \cdot 2^{2x-1} - 12$.

- Herleid het functievoorschrift tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$.
- Uit welke standaardfunctie kan de grafiek van f door transformaties ontstaan? Welke transformaties moet je dan toepassen?
- Bereken met behulp van de grafische rekenmachine het nulpunt van de grafiek van f .
- Dit nulpunt kun je ook algebraïsch vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Elke verschoven of ten opzichte van de assen vermenigvuldigde exponentiële functie heeft een functievoorschrift dat kan worden geschreven in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

Hierbij moet je soms gebruikmaken van de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van $y = g^x$ een aantal transformaties toe te passen:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor b ;
- verschuiving ten opzichte van de x -as met d eenheden.

De grafiek van f heeft daarom als **horizontale asymptoot** de lijn $y = d$. Het eventuele nulpunt vind je door $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 60 \cdot 2^x - 480$.

Breng de grafiek in beeld met de grafische rekenmachine en bepaal de vergelijking van de asymptoot. Los vervolgens op $f(x) < 0$.

Antwoord

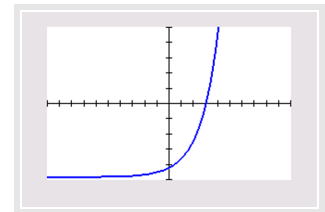
De grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = 2^x$ door:

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 60;
- verschuiving ten opzichte van de x -as met -480 eenheden.

De horizontale asymptoot is daarom $y = -480$. Bij een venster van $[-10, 10] \times [-500, 500]$ komt de grafiek goed in beeld.

$f(x) = 0$ als $60 \cdot 2^x - 480 = 0$, dus als $60 \cdot 2^x = 480$. Als je beide zijden van deze vergelijking door 60 deelt, vind je $2^x = 8$. Omdat $8 = 2^3$ is, kun je de oplossing zonder rekenmachine vinden: $x = 3$.

Uit de grafiek volgt nu de oplossing van de ongelijkheid: $x < 3$.



Figuur 2

Opgave 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5$.

- Hoe kun je de grafiek van g door transformatie laten ontstaan uit die van f ?
- Hoe kun je de grafiek van h krijgen door transformatie van de grafiek van f ?
- Welke lijn is asymptoot van de grafiek van h ?
- Geef het domein en het bereik van de functie h .
- Vereenvoudig de vergelijking $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 50 = 1000$ en los hem op in drie decimalen nauwkeurig.
- Los op in drie decimalen nauwkeurig: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 50 > 1000$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie g met voorschrift $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.

Laat zien hoe deze functie door transformatie ontstaat uit een standaardfunctie van de vorm $y = g^x$ en los algebraïsch op: $g(x) > 0$.

Antwoord

Eerst herleiden: $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$

$g(x) = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^1 + 16$

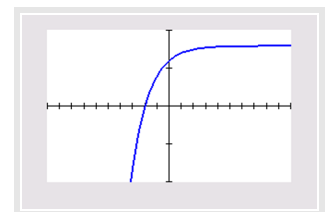
$g(x) = -4 \cdot (2^{-1})^x + 16$, dus $g(x) = -4 \cdot 0,5^x + 16$.

De grafiek van de functie $g(x) = -4 \cdot 0,5^x + 16$ ontstaat door transformatie van $y = 0,5^x$ in twee stappen.

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -4;
- translatie ten opzichte van de x -as met 16 eenheden.

Voor het oplossen van $g(x) = 0$ is het oorspronkelijke voorschrift handiger: $16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$ geeft: $16 = 2 \cdot 2^{-x+1}$. Nu is $16 = 2^4$ en $2 = 2^1$, dus: $2^4 = 2^{-x+2}$. Dit betekent dat: $4 = -x + 2$, zodat $x = -2$.

Uit de grafiek volgt de oplossing van de ongelijkheid: $x > -2$



Figuur 3

Opgave 4

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door transformatie uit de grafiek van de functie $g(x) = 2^x$ laten ontstaan.

- Je kunt dit doen door drie transformaties toe te passen. Welke drie? Schrijf ze in de juiste volgorde op.
Je kunt ook eerst het functievoorschrift van f herleiden tot $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$.
- Laat zien hoe deze herleiding gaat.
- Beschrijf nu hoe je door transformatie in twee stappen de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g .
- Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na de transformaties een punt op de grafiek van f . Geef de coördinaten van dit punt.
- Schrijf de horizontale asymptoot en het domein en het bereik van f op.

Opgave 5

Je hebt allerlei technieken geleerd om vergelijkingen algebraïsch op te lossen. Je werkt in dit hoofdstuk met de rekenregels voor machten. Bekijk dit voorbeeld van een algebraïsche oplossing.

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 8\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 2\sqrt{2}$$

$$(2^{-1})^{1-x} = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$2^{x-1} = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$x - 1 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

- Loop de uitwerking na en leg uit wat er elke stap gebeurt.
- Los algebraïsch op: $4 \cdot 3^x + 6 = 330$.
- Los algebraïsch op: $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{6}$

Opgave 6

Los op: $40 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 100 = 110$. Vereenvoudig de vergelijking eerst zover mogelijk en gebruik daarna de grafische rekenmachine. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 2^x - 60$.

- Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardfunctie $g(x) = 2^x$?
- Bereken het nulpunt van f in één decimaal nauwkeurig.
- Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ?
- Los algebraïsch op $f(x) = 20$.

Opgave 8

Los de vergelijkingen en ongelijkheden op. Vereenvoudig eerst zover mogelijk en geef daarna de oplossing met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig.

- a $5^x = 10$
- b $5^x \leq 10$
- c $3 \cdot 5^x + 5 = 10$
- d $3 \cdot 5^x + 5 > 10$

Opgave 9

Los algebraïsch op.

- a $2^x = 2\sqrt{2}$
- b $4^x = 8^{x+2}$
- c $9^{2x} = \sqrt{3}$
- d $2^{2x-1} = 32$
- e $2^{\frac{1}{2}x+1} = 4\sqrt{2}$

Opgave 10

Los algebraïsch op.

- a $5 \cdot 10^x = 5000$
- b $3 \cdot 2^p - 2 = 46$
- c $6 \cdot (5^t + 5) = 180$
- d $162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$
- e $7 + 16 \cdot 1,5^x \leq 43$
- f $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 160$

Opgave 11

Een patiënt krijgt via een infuus een vloeibaar medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0,95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in milligram van het medicijn dat na t minuten in het bloed aanwezig is.

- a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?
- b Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $A(t)$.
- c Maak duidelijk dat $A(t)$ niet exponentieel toeneemt.
- d Na hoeveel minuten is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen? Geef je antwoord in hele minuten.

Toepassen

Een kop koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De **afkoeling** gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen de koffie en de omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt. De functie $T(t) = 60 \cdot 0,998^t + 20$ beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C. Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt.

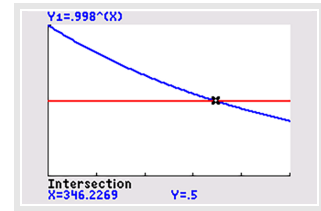
Veel mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50 °C. Na hoeveel seconden is dat het geval?

Op $t = 0$ is de $T(0) = 80$ °C.

De temperatuur daalt langzaam richting 20 °C.

De vergelijking $60 \cdot 0,998^t + 20 = 50$ kun je met de grafische rekenmachine oplossen. Je kunt er ook eerst $0,998^t = 0,5$ van maken. Ga na dat je vindt: $t \approx 346$.

Conclusie: na ongeveer 346 seconden (5 minuten en 46 seconden) is de koffie voor veel mensen niet lekker meer.



Figuur 4

Opgave 12

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van 80 °C. De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0,83^t$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

- Ga ervan uit dat de koffie niet lekker meer is als de temperatuur beneden de 50 °C komt. Tot hoe laat is de koffie nog te drinken? Bereken dit tot op de minuut nauwkeurig.
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 80 °C?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur van de koffie daalt?
- Hoe kun je de grafiek van T uit die van $T = 0,83^t$ laten ontstaan door transformatie?
- Hoelang duurt het voordat de koffie de temperatuur van 21 °C bereikt?
- Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van $T(t)$?
- De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan het functievoorschrift van $T(t)$ zien hoe hoog de temperatuur in de woonkamer is?

Testen

Opgave 13

Gegeven is de functie $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- Beschrijf welke transformaties je moet uitvoeren om de grafiek van de functie $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$ te krijgen uit de functie van g .
- Hoe kun je aan het functievoorschrift van f zien dat de grafiek stijgt?
- Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f ? Wat is het bereik van f ?
- Bereken het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- Los op: $f(x) \leq 0$.

Opgave 14

Los algebraïsch op.

- $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{18}$
- $5 \cdot 2^{-x+2} > 40$
- $0,5 \cdot 0,25^x - 4,5 \geq 3,5$
- $3 \cdot 0,5^{2x-1} - 4 < -3,25$

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
