

5.4 Exponentiële functies

Inleiding

De formules die je typisch bij exponentiële groei tegenkomt zijn voorbeelden van exponentiële functies. Je gaat daarom nu dit type functies nader bestuderen. In plaats van 'groeifactor' zal nu vaak 'grondtal' worden gezegd, nog steeds is dit grondtal een positief getal.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is;
- de karakteristieken van exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.
- opstellen van een exponentiële functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = 6 \cdot 2^x$.

- Welke snijpunten heeft de grafiek van f met de assen?
- Zijn er extremen?
- Zijn er asymptoten?
- Welke karakteristieken hebben functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$? En hoe hangen die af van de waarden van g ?

Uitleg

Bekijk de applet: exponentiële functies

Met de grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Deze functies komen onder andere voor bij exponentiële groei en heten exponentiële functies. Voor positieve waarden van b geldt:

- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend stijgend.
- Als $g = 1$ is de grafiek constant.
- Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend dalend.
- Er zijn geen nulpunten, de x -as is een horizontale asymptoot.
- Er zijn geen extremen.

Je moet dit zorgvuldiger beredeneren dan alleen op grond van een grafiek. Dan bedenkt je dat door vermenigvuldigen met een getal dat groter is dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden. Neemt x toe, dan wordt $f(x)$ dus groter. Neemt x af, dan wordt $f(x)$ kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is, maar wel een asymptoot. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$. Bedenk zelf wat er geldt bij een negatieve b .

Opgave 1

Met de grafische rekenmachine kun je de grafieken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ bekijken.

- Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Waarom heeft de grafiek van f nu geen asymptoot?
- Neem $b = 1$ en $g = 0,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- Neem $b = 2$ en $g = 1,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?
- Neem $b = -2$ en $g = 1,5$. Welk functievoorschrift krijg je? Heeft de grafiek van deze functie nulpunten? Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ? Is de grafiek stijgend of dalend?

Opgave 2

Welke eigenschappen heeft een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ als $b < 0$? Maak ook nu weer verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

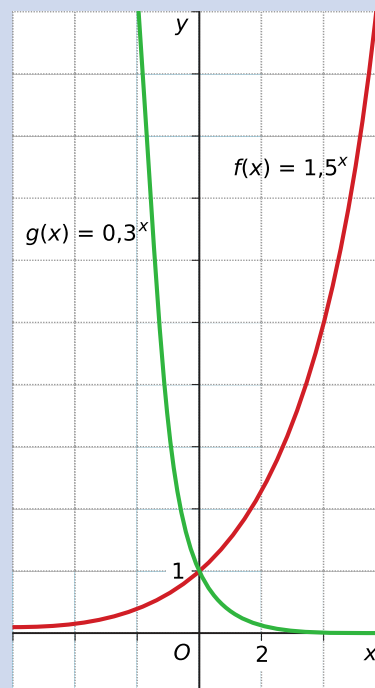
Bekijk de applet: exponentiële functies

De grafiek van de **exponentiële functie** $f(x) = b \cdot g^x$ heeft een aantal karakteristieken.

- De grafiek snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.
- Als $b > 0$ en $g > 1$, is de grafiek stijgend. Naar links (voor afnemende x) benadert de grafiek de x -as. Je kunt de functiewaarde zo dicht bij 0 krijgen als je wilt door x voldoende klein te kiezen. De x -as is de horizontale asymptoot.
- Als $b > 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek dalend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek de x -as, de horizontale asymptoot.
- Als $b < 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek stijgend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek de x -as, de horizontale asymptoot.
- Als $b < 0$ en $g > 1$, is de grafiek dalend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x -as, de horizontale asymptoot.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.

De **exponentiële vergelijkingen** zoals $b \cdot g^x = a$ los je op met de grafische rekenmachine.

Bij **exponentiële ongelijkheden** kun je deze eigenschappen gebruiken.



Figuur 1

Voorbeeld 1

In een stedelijk gebied liggen twee steden: stad A met 750000 inwoners en stad B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In stad A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in stad B was dat 3,1%.

Na hoeveel jaren heeft stad B meer inwoners dan stad A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

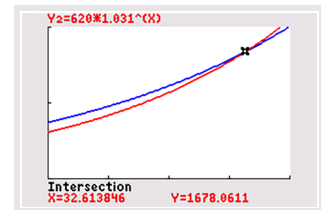
Antwoord

De groeifactor van het aantal inwoners van A is 1,025. Die van het aantal inwoners van B is 1,031. Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van stad A voorstelt, en B dat van stad B, beide in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn beide groeifuncties:

- $A(t) = 750 \cdot 1,025^t$;
- $B(t) = 620 \cdot 1,031^t$.

De bijbehorende grafieken maak je op de grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Ga na dat je $t \approx 32,6138$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 heeft stad B meer inwoners dan stad A als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 2

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Waaraan zie je dat B harder groeit dan A?
- Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t \approx 32,6138...$ vindt.
- Een derde stad C is op 1 januari 2013 kleiner dan zowel A als B, maar deze stad groeit met 8,3% per jaar. Op 1 januari 2021 heeft C even veel inwoners als B. Wanneer is C even groot als A?

Voorbeeld 2

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Deze stof wordt op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan niet worden gemeten onder een concentratie van 1 mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.

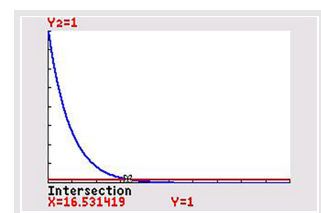
Na hoeveel dagen is deze stof uit het meer 'verdwenen'?

Antwoord

De 'groeifactor' per dag is 0,80. Op $t = 0$ is er 40 mg/L gemeten. Voor de concentratie C (mg/L) geldt dus: $C(t) = 40 \cdot 0,80^t$.

Omdat de groeifactor tussen 0 en 1 ligt, is dit een dalende exponentiële functie. Zo'n exponentiële functie komt nooit op 0 uit, hoe groot je t ook kiest. Er is sprake van een horizontale asymptoot met vergelijking $C = 0$. Is de stof dan nooit verdwenen? Theoretisch inderdaad niet, maar in de praktijk is de stof niet meer meetbaar als de concentratie onder de 1 mg/L zakt. Om te bepalen na hoeveel dagen de stof is 'verdwenen', moet je daarom de ongelijkheid $40 \cdot 0,80^t < 1$ oplossen.

Dat doe je met de grafische rekenmachine. Je vindt: $t > 16,5$.



Figuur 3

Opgave 4

In een meer is op een bepaald moment een schadelijke stof aanwezig met een concentratie van 40 mg/L. De concentratie vervalt exponentieel met 20% per dag.

- Leg uit waarom de groeifactor per dag 0,80 is.
- Breng de grafiek van $C(t)$ in beeld op de grafische rekenmachine.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig vanaf welk tijdstip de concentratie niet meer meetbaar is, dus $C(t) < 1$.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2,6)$ en $B(4,2)$.

Stel het bijpassende functievoorschrift op. Rond b en g af op twee decimalen.

Antwoord

Er zijn twee algebraïsche methodes om dit te doen:

Methode 1:

Eerst de groeifactor g bepalen.

Als x van -2 naar 4 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$.

Voor g geldt daarom $g^6 = \frac{1}{3}$ en dus $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \approx 0,83$.

Nu kun je b berekenen.

$$f(4) = 2$$

$$b \cdot 0,83^4 = 2$$

$$b \cdot 0,4746 = 2$$

$$b = \frac{2}{0,4746} \approx 4,21$$

Conclusie: $f(x) \approx 4,21 \cdot 0,83^x$.

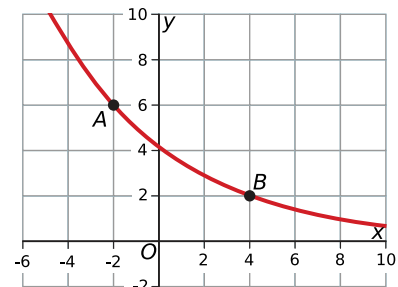
Methode 2:

Uit $f(4) = 2$ volgt: $b \cdot g^4 = 2$. Uit $f(-2) = 6$ volgt: $b \cdot g^{-2} = 6$.

De laatste vergelijking geeft: $b = \frac{6}{g^{-2}} = 6g^2$.

En dus: $6 \cdot g^2 \cdot g^4 = 2$.

Hiermee bereken je g en dan ga je verder zoals bij de eerste methode.



Figuur 4

Opgave 5

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $(10,200)$ en $(14,350)$. Stel het functievoorschrift van f op. Rond g af op twee decimalen en b op een geheel getal.

Verwerken

Opgave 6

Iemand zet € 10000,00 op een spaarrekening. De rente is 5% per jaar en wordt jaarlijks bijgeschreven op de spaarrekening.

- Stel een bijpassend functievoorschrift op voor het saldo $S(t)$ met t in jaren na het moment waarop het startbedrag op de spaarrekening is geplaatst.
- Hoelang duurt het voordat het spaartegoed is gegroeid tot minstens € 15000,00?
- Hoelang duurt het voordat het spaartegoed zich verdubbeld heeft?

Opgave 7

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat iemand ooit € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

- Hoeveel jaar geleden moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Geef je antwoord tot op een jaar nauwkeurig.
- Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S(t) = 4000 \cdot 1,05^t$ te tekenen?

- c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe. Wat betekent dit voor de grafiek van S ?

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 210 \cdot 2,5^x$.

- Bereken $f(3)$ en $f(-5)$.
- Geef de formule van de asymptoot van de grafiek van f .
- Los op: $f(x) = 1200$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- Los op: $f(x) < 2345$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

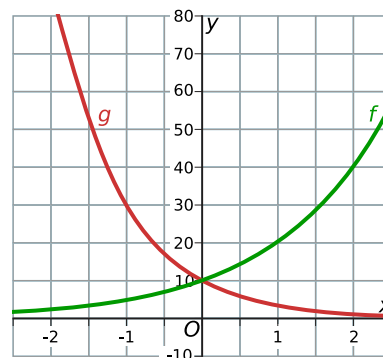
Op 1 januari 2010 zet persoon A € 2000,00 op de bank tegen 4% rente per jaar. Persoon B zet op dezelfde dag € 1500,00 op de bank tegen 6% rente per jaar.

- Geef de functievoorschriften van het banktegoed $a(t)$ van persoon A en het banktegoed $b(t)$ van persoon B, waarbij t de tijd in jaren is na 1 januari 2010.
- Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies a en b . Bij welke vensterinstellingen komen de grafieken zo in beeld dat ook het snijpunt zichtbaar is?
- Vanaf welke maand van welk jaar is het banktegoed van persoon B groter dan dat van persoon A?

Opgave 10

Bekijk de grafieken van deze twee exponentiële functies. Beide grafieken gaan door $(0,10)$.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 5

Opgave 11

Een huurder betaalt € 650,00 huur en vindt de jaarlijkse huurverhoging van 5,5% te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50,00 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

Toepassen

Opgave 12: Radioactief afval

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval daar al tien jaar ligt. De straling blijkt 2000 becquerel (Bq) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

- Hoeveel Bq was de straling een jaar geleden?
- Hoe groot was de straling 2,5 jaar na 6 januari 2014?
- Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014. Rond de groefactor af op drie decimalen.

- d Wat is het bereik van de functie bij c vanaf 6 januari 2014?
- e In welk jaar en welke maand is de straling voor het eerst minder dan 1000 Bq?

Opgave 13: Waterzuivering

Een waterzuiveringsinstallatie reinigt het afvalwater van een stad in een drietal fases:

In fase 1 wordt al het grof afval uit het water gehaald. 20% van het afval is dan weg. Al het water stroomt door naar fase 2.

In fase 2 wordt 30% van het overgebleven afval weggehaald door middel van roosters. Dit water gaat vervolgens naar fase 3.

In fase 3 doen bacteriën hun werk: 50% van het afval wordt daarmee verwijderd.

- a $20 + 30 + 50 = 100$ dus deze percentages optellen levert op dat het water na deze drie fases schoon is. Waarom is deze conclusie onjuist?
- b Bereken hoeveel procent van het afval daadwerkelijk verwijderd wordt door middel van deze waterzuivering.

Testen

Opgave 14

Iemand betaalt op 1-1-2000 een huur van € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt de huur in januari met 5,5 procent verhoogd.

- a Stel het functievoorschrift op voor de huur per maand $H(t)$ afhankelijk van de tijd t in jaren na 2000.
- b Vanaf welke datum is de huur hoger dan € 1000 per maand?

Opgave 15

Een bepaalde hoeveelheid H kan berekend worden met de functie $H(t) = 200 \cdot 1,03^t$.

- a Hoe zie je aan het functievoorschrift dat er sprake is van toename?
- b Vanaf welke waarde van t (in drie decimalen nauwkeurig) is de hoeveelheid H 200 procent groter geworden dan op $t = 0$?
- c Voor welke waarden van t is de hoeveelheid H kleiner dan 0,01?

Opgave 16

De grafiek van een exponentiële functie f van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ gaat door de punten (2,80) en (8,200).

Stel een bijpassend functievoorschrift op. Rond g af op drie decimalen en rond b af op helen.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
