

5.3 Exponenten en machten

Inleiding

Je hebt in het kader van exponentiële groei allerlei rekenregels en eigenschappen van machten en hun exponenten opgebouwd. Deze eigenschappen van exponenten en machten zul je veel moeten toepassen. Daarom moet je die eigenschappen goed 'in de vingers hebben'. Hoog tijd voor algebraïsche vingeroefeningen...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de rekenregels voor exponenten en machten;
- herleiden van exponentiële formules tot de standaardvorm.

Voorkennis

- werken met negatieve en gebroken exponenten;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten.

Verkennen

Opgave V1

Bereken: $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$

Uitleg

Om $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$ te kunnen berekenen, moet je de eigenschappen van machten goed beheersen. Je rekenmachine laat je namelijk (zeer waarschijnlijk) in de steek.

Ga na dat: $\frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}} = \frac{(19^{220})^{\frac{1}{4}}}{19^{54}} = \frac{19^{55}}{19^{54}} = 19$.

Bekijk stap voor stap welke eigenschappen er zijn gebruikt.

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg](#).

- Welke eigenschap van machten is er in de eerste stap gebruikt voor het 'wegwerken' van de wortel?
- Welke eigenschap is er vervolgens gebruikt?
- En welke eigenschap als laatste?

Opgave 2

Bereken $\frac{31^{25} \cdot \sqrt[3]{31^{30}}}{(31^{12})^3}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden **eigenschappen van machten**.

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = (\sqrt[a]{g})^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal is
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$

Deze rekenregels gelden soms ook voor negatieve grondtallen g , maar hier moet je voorzichtig mee zijn:

Bijvoorbeeld $(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = -1$, maar $(-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = 1$ en $(-1)^{\frac{2}{6}} = \left((-1)^{\frac{1}{6}}\right)^2$ kan niet eens. Voor één uitdrukking betekent dit dus drie verschillende uitkomsten! Daarom moet je er bij exponentiële functies van uitgaan dat het grondtal g positief is.

Denk verder nog aan de eigenschappen: $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ en $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Voorbeeld 1

Je ziet enkele berekeningen met behulp van de eigenschappen van machten.

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3^1}\right)^{-4} = (3^{-1})^{-4} = 3^4 = 81$
- $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
- $16^{1,5} = 16^{1+\frac{1}{2}} = 16^1 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \sqrt{16} = 16 \cdot 4 = 64$
- $27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = (\sqrt[3]{27})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Opgave 3

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

- a 3^{-2}
- b $81^{\frac{1}{4}}$
- c $(3 \cdot 12)^{\frac{1}{4}}$
- d $(2^2)^{-3} \cdot (2^{-2})^{-4}$
- e $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

- f** $125^{\frac{1}{5}} \cdot 5^4 \cdot 5^{-10}$
g $3^{-5} \cdot 9^2$
h $81^{-\frac{1}{4}}$

Voorbeeld 2

Je kunt $x^{-1\frac{1}{2}}$ schrijven zonder negatieve en/of gebroken exponenten:

$$x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Opgave 4

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

- a** $2x^{2\frac{1}{3}}$
b $\frac{3x^{-1}}{2x}$
c $4x^{\frac{3}{4}}$
d $2x^{\frac{1}{2}}$

Voorbeeld 3

Je kunt $3x \cdot \sqrt{x}$ schrijven in de vorm ax^b :

$$3x \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot \sqrt{x} = 3 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$$

Opgave 5

Schrijf in de vorm ax^b .

- a** $\frac{3}{2x}$
b $\frac{3}{4x\sqrt{x}}$
c $(4\sqrt[3]{x})^2$
d $2x\sqrt{x}$
e $\frac{2}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$
f $3x^5 \cdot (2x^3)^2$

Voorbeeld 4

Gegeven is de functie $f(x) = 0,5^{2x-1}$.

Schrijf deze functie in de standaardvorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Antwoord

Met de eigenschappen van machten vind je:

$$f(x) = 0,5^{2x-1} = 0,5^{2x} \cdot 0,5^{-1} = (0,5^2)^x \cdot 2 = 2 \cdot 0,25^x$$

Dit functievoorschrift is nu in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ en dit is een standaardvorm voor formules waarbij sprake is van exponentiële groei. Het begingetal is 2 en de groeifactor is 0,25.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 12 \cdot 4^{-0,5x+1}$.

Laat zien dat je deze functie in de vorm $y = b \cdot g^x$ kunt schrijven en bereken b en g .

Verwerken

Opgave 7

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a $(2^3)^2$

b $2^3 \cdot 2^2$

c $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8$

d $1000^{\frac{1}{3}}$

e $2^{-2} \cdot 4^{-1}$

f $(3^2)^{-1}$

Opgave 8

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a x^{-1}

b $x^{-\frac{1}{2}}$

c $x^{\frac{3}{4}}$

d $x^{1\frac{3}{4}}$

e $3x^{-1,5}$

f $\frac{1}{2}x^{-2,75}$

Opgave 9

Herleid tot de vorm ax^b .

a $\frac{2}{\sqrt{x}}$

b $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

c $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[4]{x}}$

d $\frac{1}{2}\sqrt{x}$

e $\frac{1}{2x \cdot \sqrt{x}}$

f $(3x \cdot \sqrt{x})^3$

Opgave 10

Bereken.

a $\frac{17^{110}}{17^{23}} \cdot 17^{-85}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233}$

d $\frac{7^{102}}{(49^{10})^5}$

e $\left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}}$

f $\frac{5^3 \cdot (3^5)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}}$

Opgave 11

Je kunt de rekenregels gebruiken om bepaalde uitdrukkingen in x te herleiden tot macht van x . Laat zien hoe het herleiden in zijn werk gaat.

a $(2x^3)^4 \cdot -3x^5 = -48x^{17}$

b $\frac{2x \cdot x^2}{x^4} = 2x^{-1}$

c $4x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 4x^{2\frac{1}{3}}$

d $\frac{2}{x \cdot \sqrt{x}} = 2x^{-1\frac{1}{2}}$

e $\frac{1}{2x\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{3}}$

f $\frac{(2\sqrt{x})^3}{x^2 \cdot \sqrt[3]{8x}} = 4x^{-\frac{5}{6}}$

Opgave 12

Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

a $f(x) = 3 \cdot 2^{0,5x}$

b $f(x) = 0,5 \cdot x+2$

c $f(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x}$

d $f(x) = 7 \cdot 5^{2x+1} + 2 \cdot (\sqrt{5})^{4x}$

Toepassen

Opgave 13: Puzzel met machten

Als het getal $\left(\left(\left((7^6)^5\right)^4\right)^3\right)^2$ wordt uitgeschreven, wat is dan het laatste cijfer?

Testen

Opgave 14

Bereken zonder rekenmachine.

a $3^{-5} \cdot 9^2$

b $2^{-10} \cdot (2^3)^5$

c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

d $81^{-\frac{1}{4}}$

Opgave 15

Herleid de volgende uitdrukkingen tot de vorm ax^n .

a $3x^5 \cdot (2x^3)^2$

b $\frac{x^2 \cdot 3x^4}{x^7}$

c $4x \cdot \sqrt[4]{x^2}$

Opgave 16

Schrijf het functievoorschrift $f(x) = 6 \cdot (\sqrt{2})^{4x-2}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het rekenen met machten en variabelen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
