

5.2 Reële exponenten

Inleiding

Tot nu toe kun je bij exponentiële groei eigenlijk alleen wat zeggen op tijdstippen die gehele positieve waarden hebben. En dat is natuurlijk niet wenselijk, je wilt weten hoeveel bacteriën er zijn na 1,5 uur, of 2,3 uur voor het begintijdstip. Je gaat nu kijken hoe het met gebroken en/of negatieve exponenten zit. Dat levert weer een paar nieuwe rekenregels voor machten op... In het algemeen zul je leren werken met alle mogelijke reële exponenten.

Je leert in dit onderwerp

- werken met gebroken en/of negatieve exponenten;
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden;
- vergelijkingen met exponentiële functies oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

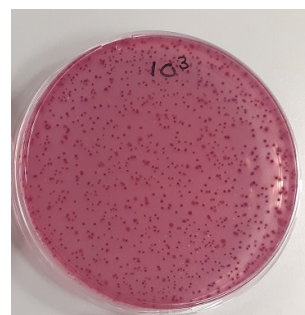
- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

De hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje groeit volgens de formule $B = 600 \cdot 2^t$. Het startmoment van meten $t = 0$ is om 12:00 uur.

- Hoeveel bacteriën zijn er geweest om 11:00 uur?
- Hoeveel mg bacteriën zijn er geweest om 10:00 uur?
- Hoe bereken je de hoeveelheid bacteriën als je terug gaat in de tijd?
- Kun je ook het aantal bacteriën bepalen om 14:15 uur?



Figuur 1

Uitleg 1

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt de formule: $B = 600 \cdot 2^t$.

$t = 0$ komt overeen met 12:00 uur.

$t = -1$ komt overeen met een uur voor 12:00 uur.

Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën. Als je aanneemt dat dit vóór 12:00 uur ook het geval was, dan zullen er om 11:00 uur: $600 \cdot \frac{1}{2} = 300$ bacteriën in het schaalje hebben gezeten.

Het aantal bacteriën in voorgaande uren bereken je door telkens te delen door 2 (dus vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$).



Figuur 2

tijd (h)	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	150	300	600	1200	2400	4800	9600	19200	38400

Tabel 1

Met het functievoorschrift $B(t) = 600 \cdot 2^t$ kun je de hoeveelheid bacteriën t uur na 12:00 uur berekenen voor positieve gehele getallen t . Wil je met deze formule ook het aantal bacteriën 1 uur voor 12:00 uur kunnen berekenen, dan moet: $B(-1) = 600 \cdot 2^{-1} = 300$.

Blijkbaar moet je afspreken dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Ook voor andere tijdstippen voor 12:00 uur wil je het functievoorschrift kunnen gebruiken. Dus moet gelden:

- op tijdstip $t = -2$ (10:00 uur): $600 \cdot 2^{-2} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 150$;
- op tijdstip $t = -3$ (9:00 uur): $600 \cdot 2^{-3} = 600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$; enzovoort.

Je moet dus ook afspreken dat $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$, enzovoort.

Je spreekt in het algemeen af, dat $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$. Daarmee kun je met negatieve exponenten rekenen. Let op! Nu mag g niet 0 zijn!

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1](#).

- Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 8:00 uur te berekenen?
- Bereken het aantal bacteriën om 8:00 uur.

Uitleg 2

Voor het aantal bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt $B = 600 \cdot 2^t$. Elk uur verdubbelt het aantal bacteriën, het aantal groeit met groeifactor 2. Het aantal bacteriën groeit ook met een vaste groeifactor per half uur, per kwartier, enzovoort.

Voor de groeifactor per half uur schrijf je $2^{\frac{1}{2}}$.

Voor de groeifactor per kwartier schrijf je $2^{\frac{1}{4}}$.

Voor de groeifactor per anderhalf uur schrijf je $2^{1\frac{1}{2}}$.

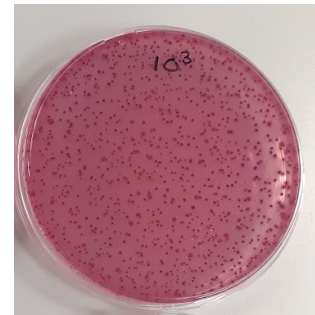
Welk getal stelt $2^{\frac{1}{2}}$ voor?

De groeifactor per uur kun je vinden door de groeifactor per half uur twee keer toe te passen:

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2.$$

Je weet dat $(\sqrt{2})^2 = 2$. Blijkbaar geldt: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Op dezelfde manier kun je beredeneren dat voor de groeifactor per kwartier geldt: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Je spreekt in het algemeen af dat $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$. En daarmee kun je met gebroken exponenten rekenen. Let op! Nu moet g positief zijn om altijd een reële uitkomst op te leveren.



Figuur 3

Opgave 2

Bekijk [Uitleg 2](#).

- Wat moet je in de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ invullen om het aantal bacteriën om 14:30 uur te berekenen?
- Bereken het aantal bacteriën om 14:30 uur.

Opgave 3

Gebruik de formule $B(t) = 600 \cdot 2^t$ uit [Uitleg 2](#).

- Hoeveel bedraagt de groeifactor per drie uur?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per vier uur?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per vijf uur?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per half uur?

- e Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartier?
- f Gebruik de rekenmachine om het aantal bacteriën te berekenen na 5 uur, na 5,5 uur en na 5,75 uur.
- g Laat zien dat je het aantal bacteriën na 5,75 uur ook kunt berekenen door het aantal na 5 uur eerst te vermenigvuldigen met de groeifactor per half uur en daarna met de groeifactor per kwartier.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij exponentiële groei moet je per tijdseenheid de hoeveelheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de groeifactor die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groeifactor is, dan geldt: $g > 0$. Om met negatieve exponenten en/of gebroken exponenten te kunnen werken, zijn er afspraken nodig.

• **negatieve exponenten:** $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

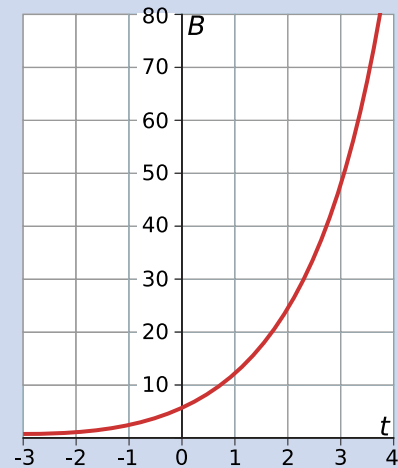
• **gebroken exponenten:** $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

Deze afspraken gelden voor $g > 0$ en positieve gehele n .

Beide afspraken passen helemaal in de rekenregels voor machten,

bijvoorbeeld: $g^{-n} = g^{0-n} = \frac{g^0}{g^n} = \frac{1}{g^n}$

Je hebt nu gezien dat een macht g^a voor $g > 0$ betekenis heeft als de exponent a een positief getal, 0, een negatief getal of een gebroken getal is. Voor a mag je zelfs elk reëel getal invullen. En daarom kunnen bij exponentiële groei grafieken worden getekend in de vorm van een vloeiende kromme lijn. Je ziet de grafiek van $B = 6 \cdot 2^t$.



Figuur 4

Voorbeeld 1

Thomas Robert Malthus leefde in het begin van de negentiende eeuw. Hij vermoedde dat de groei van de wereldbevolking exponentieel was. In de tabel zie je het aantal mensen op aarde in de negentiende eeuw.

jaartal	1800	1820	1840	1860	1880	1900
aantal mensen (mln)	1000	1102	1216	1340	1477	1629

Tabel 2

Stel een passend functievoorschrift op voor de bevolking per jaar. Bereken vervolgens hoeveel mensen er in 1600 en in 2000 volgens dit model geweest zouden moeten zijn.

Antwoord

Van 1800 tot 1820 wordt het aantal mensen vermenigvuldigd met: $\frac{1102}{1000} = 1,102$. Controleer dat dit voor elke volgende periode van 20 jaar ook ongeveer zo is. Vanaf 1800 tot 1900 groeide de wereldbevolking met een vrijwel constante groeifactor per 20 jaar van 1,102. De groeifactor per jaar is dan $1,102^{\frac{1}{20}} \approx 1,005$. Neem je de tijd t in jaren met $t = 0$ in 1800 en het aantal miljoen mensen N , dan is: $N(t) = 1000 \cdot 1,005^t$.

In 1600 zouden er dan $1000 \cdot 1,005^{-200} \approx 369$ miljoen mensen zijn geweest.

In 2000 zouden er dan $1000 \cdot 1,005^{200} \approx 2712$ miljoen mensen zijn geweest.

In werkelijkheid waren dat er nog veel meer, namelijk meer dan 6000 miljoen!

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je de groei van de wereldbevolking in de negentiende eeuw.

- Bereken het aantal mensen in 1600 en in 2000 met behulp van de groeifactor per twintig jaar. Ontstaan er verschillen met de antwoorden in het voorbeeld?
- Doe dit nog eens met behulp van de groeifactor per vijf jaar. Rond af op miljoenen per jaar.
- Bereken met behulp van het groeimodel in het voorbeeld het aantal mensen in 2008.
- Wanneer zou volgens dit groeimodel het aantal mensen verdubbeld zijn ten opzichte van het aantal in 1900?

Voorbeeld 2

Een spaartegoed staat uit tegen 0,7% rente per jaar. De bank kan de rente per half jaar bijschrijven of zelfs maandelijks. Met welke rentepercentages moet de bank dan werken? (Geef beide percentages in twee decimalen nauwkeurig.)

Antwoord

De groeifactor van het spaartegoed per jaar is 1,007.

Als g de groeifactor per half jaar is, kun je die op twee manieren uitrekenen:

- uit $g \cdot g = g^2 = 1,007$ volgt $g = \sqrt{1,007} \approx 1,00349$;
- of $g = 1,007^{\frac{1}{2}} \approx 1,00349$.

Het rentepercentage per half jaar is dus ongeveer 0,35%.

Op dezelfde manier is de groeifactor per maand $1,007^{\frac{1}{12}} \approx 1,00058$ of $\sqrt[12]{1,007} \approx 1,00058$. Het rentepercentage per maand is dus ongeveer 0,06%.

Opgave 5

Iemand zet op 1 juli 2014 een bedrag van € 7500,00 op de bank vast tegen een rente van 2,1% per jaar. Hoeveel bedraagt zijn kapitaal op 1 januari 2016?

- Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per jaar.
- Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per half jaar.
- Beantwoord de vraag met behulp van de groeifactor per maand.

Opgave 6

Bij een bank krijg je 1,1% rente per jaar. Hoe groot is het rentepercentage per maand? Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 3

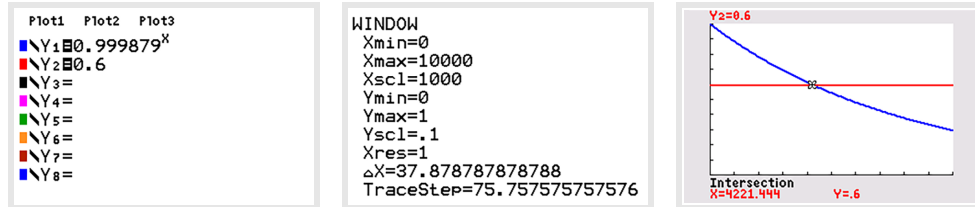
De ouderdom van hele oude voorwerpen wordt bepaald met de zogenaamde C14-methode. C14 is een bepaalde variant van koolstof, een stof die in levende wezens voorkomt en dus ook in mummies, oude houten en leren voorwerpen, en dergelijke. Deze variant neemt exponentieel af nadat een levend wezen is gestorven. Voor dat moment is de concentratie C14 gelijk aan die in onze atmosfeer, na die tijd wordt die concentratie kleiner. De halveringstijd van deze stof is nauwkeurig bekend, namelijk 5736 jaar.

Stel dat bij een bepaalde mummie de concentratie C14 is afgenomen met 40%. Er is dan nog 60% van de oorspronkelijke concentratie over. Hoe bereken je nu de leeftijd van die mummie?

Antwoord

De halveringstijd is 5736 jaar. Als g de groeifactor per jaar is, geldt: $g^{5736} = 0,5$. Hieruit bereken je de groeifactor per jaar: $g = \sqrt[5736]{0,5} \approx 0,999879$. Als t de leeftijd van de mummie is, moet $0,999879^t = 0,6$. Deze exponentiële vergelijking los je op met de grafische rekenmachine: $t \approx 4221$ jaar.

De mummie is dus ongeveer 4221 jaar.



Figuur 5

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt de C14-methode voor het dateren van oude voorwerpen besproken.

- Bereken de groeifactor per eeuw. Rond je antwoord af op drie decimalen.
- Bereken met behulp hiervan de leeftijd van een oud gebruiksvoorwerp waarvan de concentratie C14 nog 38% is.

Opgave 8

Bij een kernsplijting is een hoeveelheid radioactieve stof Cesium-137 vrijgekomen. De halveringstijd van deze stof is dertig jaar.

- Na hoeveel jaar is de hoeveelheid van deze stof afgenomen tot 25%?
- Bereken na hoeveel jaar de hoeveelheid nog maar 11% is.

Verwerken

Opgave 9

Het aantal inwoners van een stad wordt gegeven door de formule $A = 25000 \cdot 1,1^t$, waarbij A het aantal inwoners op tijdstip t (jaar) is, met $t = 0$ op 1 januari 2015.

- Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 januari 2025?
- Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 augustus 2025?
- Hoe groot is de groeifactor per jaar?
- Hoe groot is het groeipercentage per maand?
- Bereken de hoeveelheid inwoners op 1 januari in de jaren 2010 en 2005.

Opgave 10

Op 1 januari 2012 had iemand een kapitaal van € 7969,24 op zijn spaarrekening staan. Het kapitaal stond al jaren vast tegen een rente van 6%. De rente wordt ieder jaar bijgeschreven.

- Bereken de grootte van het kapitaal op 1 januari 2011, 1 januari 2010 en 1 januari 2009.
- In welk jaar heeft het kapitaal een grootte van € 5618,00?
- De spaarder heeft waarschijnlijk een rond bedrag ingelegd toen hij begon met sparen. Wanneer is de spaarder begonnen met sparen en met welk bedrag?

Opgave 11

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel. In drie uur tijd is het aantal gegroeid van 1200 (om 10:00 uur) naar 3000.

- Wat is de groeifactor per drie uur?
- Bereken het groeipercentage per uur.
- Welke formule kun je opstellen voor de groei van deze kolonie als $H(t)$ de hoeveelheid bacteriën en t de tijd in uren voorstelt? Neem $t = 0$ op het moment dat er 1200 bacteriën zijn. Rond de groeifactor af op drie decimalen.
- Op welk moment waren er nog 600 bacteriën? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Opgave 12

Sinds het begin van de jaartelling is de wereldbevolking steeds sneller gegroeid. Het aantal van 300 miljoen aardbewoners aan het begin van de jaartelling verdubbelde zich in vijftienhonderd jaar. In 1750 waren er 800 miljoen mensen en vijftig jaar later zelfs 1,2 miljard. Niet langer dan 150 jaar later was het aantal mensen op aarde opnieuw verdubbeld (tot 2,4 miljard in 1950). In 1986 telde de wereldbevolking 4,8 miljard mensen. In 1997 waren er 1 miljard mensen meer dan in 1986. In 2000 waren er 6 miljard mensen en in 2050 zal de aarde wellicht circa 9 miljard mensen tellen.

- Bereken voor de periodes 1500-1750, 1750-1800 en 1986-1997 het groeipercentage per jaar.
- Vanaf het begin van de jaartelling is de bevolking al meer dan vier keer verdubbeld in aantal. In welke tijdvakken vonden deze verdubbelingen plaats?
- Bereken voor deze periodes het groeipercentage per jaar.

Opgave 13

De radioactieve stof jodium-131 ontstaat bij een kernexplosie. Doordat de fall-out op het gras komt, krijgt het hooi een te hoog jodium-131 gehalte. Melk van koeien die met dit hooi gevoerd worden, is niet meer voor consumptie geschikt. Na een ongeluk in een kerncentrale bevat hooi in de omtrek van de centrale zes keer het toegestane gehalte jodium-131. De halveringstijd van jodium-131 is acht dagen.

Hoeveel dagen moet het hooi bewaard blijven, voordat het weer aan koeien gevoerd kan worden?

Toepassen

Opgave 14: Vulkaan op IJsland

Stel je een gebied voor met daarin een vulkaan en twee steden: Árborg en Eyrarbakki. Stel de stad Árborg heeft in 2020 45000 inwoners, dit aantal neemt per jaar toe met een factor 1,03. Het inwonertal van Eyrarbakki is dan 55000 en heeft een verdubbelingstijd van dertig jaar.

- Hoe groot is de groeifactor per jaar van Eyrarbakki? Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.
- Hoe groot is de verdubbelingstijd van het inwonertal van Árborg?
- Geef zowel van Árborg als van Eyrarbakki een formule waarmee je het bevolkingsaantal B kunt berekenen als functie van t (het aantal jaren).

Stel dat in het jaar 2020 de vulkaan uitbarst en een kwart van de bevolking van Árborg om het leven zou komen. Na de uitbarsting groeit de bevolking weer zoals voor de vulkaanuitbarsting.

- Wanneer heeft Árborg dan weer het oude aantal inwoners?
- Welk van deze twee steden heeft in het jaar 2150 de meeste inwoners als die vulkaanuitbarsting inderdaad zou hebben plaatsgevonden?

Testen

Opgave 15

In een vijver is sterke algengroei. Op het tijdstip dat men begint met meten, zit er in een liter water 10 gram algen. Deze concentratie algen blijkt per week met 15 procent toe te nemen.

- Geef een formule waarmee je de concentratie algen A in liter per 10 gram algen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in weken, met $t = 0$ het tijdstip waarop men begon met meten.
- Neem aan dat ook voor de meting de concentratie algen groeide met 15 procent per week. Hoe hoog was de concentratie algen drie weken voor het begin van de meting? Rond af op één decimaal.
- Wat was de concentratie algen twee dagen voor het begin van de meting? Geef het antwoord weer in één decimaal nauwkeurig.
- Na hoeveel dagen was de hoeveelheid algen verdubbeld?

Opgave 16

Van een bepaalde soort vlinders daalt het aantal exponentieel. In een zeker seizoen ($t = 0$) zijn er ongeveer 6000 van deze vlinders. Vijf jaar later zijn er nog ongeveer 4300. De vlinders worden door onderzoekers altijd aan het begin van het seizoen geteld.

- Bereken de groeifactor per jaar van deze soort vlinders. Rond af op 3 decimalen.
- Stel een formule op voor het aantal vlinders van deze soort als functie van t (in jaren).
- Met hoeveel procent neemt het aantal vlinders per jaar af?
- Hoeveel bedraagt de halveringstijd voor het aantal vlinders van deze soort?
- Bereken na hoeveel jaar de onderzoekers voor het eerst minder dan 1000 vlinders zullen tellen.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
