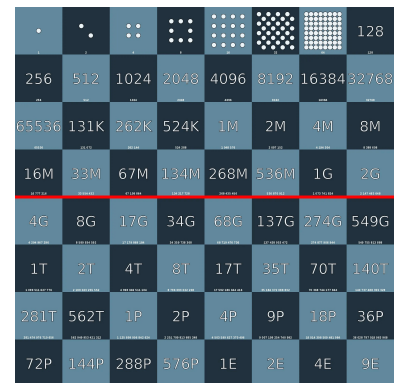


5.1 Exponentiële groei

Inleiding

Groeiverschijnselen komen veel voor, denk aan het toenemen van geld dat je op de bank zet, het toenemen van de kosten als je meer km in de taxi zit, het groeien van de bevolking, enzovoorts. Soms is er sprake van toename met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid, soms is er sprake van toename die afhankelijk is van de hoeveelheid zelf: hoe groter de hoeveelheid, hoe groter ook de toename per tijdseenheid. Bij exponentiële groei is de toename een vast percentage van de totale hoeveelheid.



•	••	•••	••••	•••••	••••••	•••••••	••••••••	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	
65536	131K	262K	524K	1M	2M	4M	8M	
16M	33M	67M	134M	268M	536M	1G	2G	
4G	8G	17G	34G	68G	137G	274G	549G	
1T	2T	4T	8T	17T	35T	70T	140T	
281T	562T	1P	2P	4P	9P	18P	36P	
72P	144P	288P	576P	1E	2E	4E	9E	

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en afname;
- bijpassende formules opstellen bij exponentiële groei;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden;
- enkele rekenregels voor het werken met machten.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met de begrippen macht, grondtal, exponent en groeifactor;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt een heel groot vel papier (A1-formaat). Het vel papier vouw je dubbel. Het dubbelgevouwen papier is dan twee lagen dik. Vouw je dit papier nogmaals dubbel, dan is het papier vier lagen dik. Een echt vel papier kun je natuurlijk steeds moeilijker dubbelvouwen. Wanneer je je het vel papier voorstelt als een onbegrensd vlak zonder dikte, kun je in principe blijven doorgaan met dubbelvouwen.

- Hoeveel lagen papier zijn er na twintig keer dubbelvouwen?
- Waarom zal dit met een A4'tje in werkelijkheid nooit lukken?
Stel dat een onbegrensd vel papier 0,15 mm dik is.
- Hoe dik is het aantal lagen na twintig keer vouwen?
- Van een ander vel papier is na net zo vaak vouwen het aantal lagen maar 5 centimeter dik. Hoe dik is dat papier?

Uitleg 1

Bacteriën planten zich voort door tweedeling. Elke bacterie brengt twee nieuwe bacteriën voort door zich te delen. Bij een geschikte temperatuur kan de groei van het aantal bacteriën verlopen als in de tabel.

tijd (uur)	0	1	2	3	4	5	6
hoeveelheid bacteriën	6	12	24	48	96	192	384

Tabel 1

De hoeveelheid bacteriën wordt elk uur twee keer zo groot. Dat zie je door opeenvolgende waarden in de tabel op elkaar te delen.

$$\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \frac{192}{96} = 2$$

Je moet dus steeds met factor 2 vermenigvuldigen om de volgende waarde te vinden:

- op tijdstip 0 heb je 6 bacteriën;
- na 1 uur heb je $6 \cdot 2$ bacteriën;
- na 2 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2$ bacteriën;
- na 3 uur heb je $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2^3$ bacteriën, enzovoort.

Je zegt: de hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Voor de hoeveelheid bacteriën B na t uur geldt in dit geval de formule $B(t) = 6 \cdot 2^t$. Je ziet dat er machten worden gebruikt voor het herhaaldelijk vermenigvuldigen. In dit geval zijn het machten met grondtal 2; dit getal is de groeifactor per uur. Omdat de variabele t in de exponent zit, spreek je van exponentiële groei.

Met deze formule kun je gemakkelijk berekenen hoeveel bacteriën je na bijvoorbeeld 10 uur hebt: $B(10) = 6 \cdot 2^{10} = 6144$.

Opgave 1

Bekijk het verhaal van de bacteriegroei in [Uitleg 1](#).

- Wat versta je onder de 'groeifactor' per uur van de hoeveelheid bacteriën?
- Hoeveel procent bacteriën komt er elk uur bij?
- Hoeveel bacteriën heb je na 12 uur?

Uitleg 2

Door te denken aan bacteriegroei en de functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ kun je een aantal rekenregels voor machten afleiden.

- Allereerst heb je op $t = 0$ volgens de formule $6 \cdot 2^0$ bacteriën. Omdat je weet dat dit precies 6 moet zijn, is: $2^0 = 1$.
- Na 3 uur heb je $6 \cdot 2^3$ en 4 uur later $6 \cdot 2^3 \cdot 2^4$. Dit is de *hoeveelheid bacteriën* na 7 uur, dus $6 \cdot 2^7$. Conclusie: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Als je machten vermenigvuldigt, tel je de exponenten op.
- Na 7 uur heb je $6 \cdot 2^7$ en 4 uur eerder $6 \cdot \frac{2^7}{2^4}$. Dit is de hoeveelheid bacteriën na 3 uur, dus $6 \cdot 2^3$. Conclusie: $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$. Als je machten deelt, trek je de exponenten af.

- De groeifactor per uur is 2. Per 3 uur is die groeifactor $2^3 = 8$. De hoeveelheid bacteriën na 12 uur kun je op twee manieren berekenen: $6 \cdot 2^{12}$ of $6 \cdot 8^4$. Dus moet $(2^3)^4 = 2^{12}$. Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

Deze rekenregels gelden voor alle grondtallen en exponenten. Alleen met grondtal 0 moet je voorzichtig zijn.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^3$$

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

$$2^0 = 1$$

Figuur 2

Opgave 2

Schrijf als één macht. Gebruik de rekenregels.

- $2^4 \cdot 2^{14}$
- $3^3 \cdot 3^5$
- $\frac{5^9}{5^4}$
- $(6^3)^6$

Opgave 3

- a Hoeveel is 0^4 ?
b En hoe zit het met 0^0 ? Welke moeilijkheid doet zich nu voor?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij **exponentiële groei** moet je per tijdseenheid een hoeveelheid steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigen. Dit getal heet de **groefactor** die bij die tijdseenheid hoort. Als g de groefactor is dan geldt: $g > 0$. Om vast te stellen of de groei exponentieel is, deel je opeenvolgende waarden van de hoeveelheid op elkaar (let op dat er steeds evenveel tijd verstreken is). Komt daar steeds hetzelfde getal uit, dan is er sprake van exponentiële groei. De hoeveelheid op $t = 0$ noem je de beginwaarde. Als een hoeveelheid met steeds hetzelfde percentage groeit, is er sprake van exponentiële groei. Bij een groei met p procent hoort de groefactor:

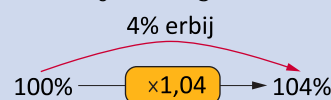
$$g = 1 + \frac{p}{100}$$

Voor $p > 0$ neemt de hoeveelheid toe en is $g > 1$: exponentiële toename.

Voor $p < 0$ neemt de hoeveelheid af en is $0 < g < 1$: exponentiële afname.

Bij exponentiële groei werk je met machten: vermenigvuldig je n keer hetzelfde getal g , dan schrijf je dat als g^n . Dit is een **macht**. De groefactor g heet het **grondtal**, n heet de **exponent**, waarbij n (voorlopig) een positief geheel getal is. Voor $n = 0$ is de afspraak: $g^0 = 1$. In het algemeen gelden voor een willekeurig grondtal g en willekeurige positieve gehele n en m een aantal **rekenregels voor machten**:

- $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$
- $\frac{g^n}{g^m} = g^{n-m}$
- $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$



Figuur 3



Figuur 4

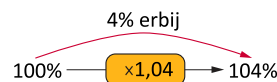
Voorbeeld 1

Op 1 januari 2010 stond een bedrag van € 3500,00 op een spaarrekening. De bank gaf op deze rekening een rente van 4% per jaar. Neem aan dat dit alles vanaf 1 januari 2010 niet verandert en stel een formule op voor het saldo S op deze rekening afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010. Maak ook een tabel die laat zien hoe het saldo zich ontwikkelde.

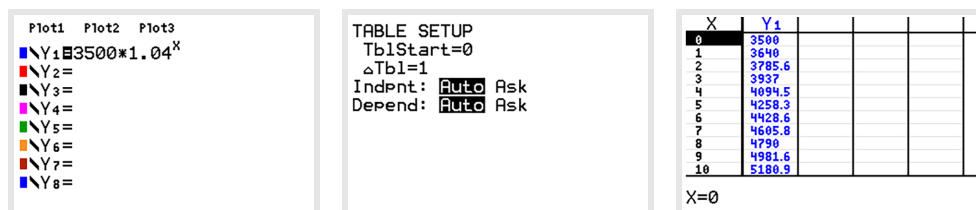
Antwoord

Bij een toename van 4% per jaar hoort een groefactor van 1,04. Op $t = 0$ was het saldo € 3500,00. Een passende formule is daarom: $S = 3500 \cdot 1,04^t$.

Als je deze formule invoert op de rekenmachine heb je snel een tabel.



Figuur 5



Figuur 6

Opgave 4

Iemand zet op 1 januari 2010 € 800,00 op een bankrekening tegen 0,6% rente. De rente wordt jaarlijks op de bankrekening bijgeschreven. Er wordt verder geen geld op de bankrekening gestort of geld van de bankrekening gehaald.

- Wat is de groeifactor per jaar van het tegoed op de bankrekening?
- Hoeveel geld staat er op de bankrekening op 1 januari 2015?
- Welke formule geldt voor het spaartegoed $S(t)$, waarin t de tijd in jaren na 1 januari 2010?
- Hoe groot is de groeifactor per vijf jaar? Bereken ook het groeipcentage per vijf jaar.
- Laat met berekeningen zien dat je op de volgende manieren het tegoed op 1 januari 2030 kunt berekenen.
 - $t = 20$ invullen in de formule;
 - het tegoed op 1 januari 2010 vijf keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 4 jaar;
 - het tegoed op 1 januari 2010 vier keer vermenigvuldigen met de groeifactor per 5 jaar.

Voorbeeld 2

Een krant ziet in een reeks van jaren het aantal abonnementen dalen.

jaartal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
aantal abonnementen (×1000)	970	941	913	885	859	833

Tabel 2

Stel op grond van deze tabel een zo goed mogelijk passende formule op die het verloop van het aantal duizenden abonnementen A als functie van de tijd t in jaren beschrijft. Neem $t = 0$ voor 2010. Als het aantal abonnementen onder de 500000 zakt, raakt de krant in problemen. In welk jaar is dat het geval als dit verloop niet wijzigt?

Antwoord

Controleer eerst of je een exponentiële formule mag maken: de jaartallen nemen gelijkmatig toe. Deling van opeenvolgende aantallen abonnementen levert steeds (ongeveer) 0,97 op, dus de daling is een vorm van exponentiële groei.

De groeifactor $g \approx 0,97 < 1$, dus er is sprake van exponentiële afname. Het aantal abonnementen neemt jaarlijks met 3% af. Een passende formule is daarom: $A(t) = 970 \cdot 0,97^t$.

Maak een tabel van deze functie met de rekenmachine. Op $t = 21$ is de waarde van A ongeveer 512. En op $t = 22$ is de waarde van A ongeveer 496. Dus bij $t = 22$ komt het aantal abonnementen voor het eerst onder de 500000. De krant raakt in 2032 in de problemen.

X	Y1			
16	595.83			
17	577.95			
18	560.61			
19	543.79			
20	527.48			
21	511.66			
22	496.31			
23	481.42			
24	466.97			
25	452.97			
26	439.38			

X=16

Figuur 7

Opgave 5

Bekijk de tabel in [Voorbeeld 2](#).

- Controleer dat de groeifactor per jaar inderdaad ongeveer 0,97 is.
- Welke formule vind je voor het aantal abonnementen $A(t)$ als je $t = 0$ neemt in 2017?
- Laat zien dat de krant in 2032 in de problemen raakt.

Opgave 6

Neem de tabel over en vul in.

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3				
groeifactor per jaar				1,15	0,98	3,95	0,01

Tabel 3

Voorbeeld 3

Bereken $\frac{256^{1000} \cdot 64^{200}}{1024^{919}}$.

Antwoord

Dit kun je met de rekenregels van machten berekenen.

$$256 = 2^8, 64 = 2^6 \text{ en } 1024 = 2^{10}$$

$$\text{En dus staat hier: } \frac{(2^8)^{1000} \cdot (2^6)^{200}}{(2^{10})^{919}} = \frac{2^{8000} \cdot 2^{1200}}{2^{9190}} = \frac{2^{9200}}{2^{9190}} = 2^{10} = 1024.$$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**. Gebruik de rekenregels voor machten om de uitdrukkingen als een macht te schrijven.

- a $3^{83} \cdot (3^{40})^2$
- b $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}}$
- c $\frac{(4^3)^2 \cdot 64^4}{16^2}$
- d $\frac{1296^2 \cdot 7776^3}{36}$

Verwerken

Opgave 8

Schrijf als één macht.

- a $2^4 \cdot 2^3$
- b $(2^3)^2$
- c $\frac{2^{512}}{2^{509}}$
- d $(5^1)^4 \cdot 5^3$

Opgave 9

In een ondiep meer van 1000 km² begint riet te groeien. Op 1 januari 2014 is de oppervlakte van het met riet begroeide deel 2 km². Vanaf dat moment wordt de oppervlakte van het met riet begroeide deel gemeten. Op een gegeven moment constateert men dat de oppervlakte van het met riet begroeide deel elk jaar drie keer zo groot is geworden. Ga ervan uit dat het riet zich in hetzelfde tempo blijft uitbreiden.

- a Geef het functievoorschrift van de met riet begroeide oppervlakte $R(t)$ in km², waarbij t de tijd in jaren is en $t = 0$ op 1 januari 2014.
- b Maak een tabel bij deze functie voor de eerste vijf jaar.
- c In welk jaar is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet?

Opgave 10

Elk jaar wordt het aantal herten in een natuurgebied geteld op 1 januari. Op 1 januari 2014 worden er 5000 herten geteld. Uit tellingen is gebleken dat dit aantal met 4% per jaar daalt.

- a Stel een formule op voor de 'groei' van het aantal herten N als functie van de tijd t in weken, waarbij $t = 0$ op 1 januari 2014.
- b Bereken het aantal herten op 1 januari 2024.

- c Bereken het groeipercentage per tien jaar.
- d In welk jaar is het aantal herten gehalveerd?

Opgave 11

In de herfst 'schieten' de paddenstoelen uit de grond. Dit komt omdat de paddenstoel onder de grond groeit. Hier neemt de paddenstoel vocht op. Als het heeft geregend, schiet de paddenstoel razendsnel omhoog.

Ga uit van een paddenstoel die begint met groeien tijdens een regenbui om 23:00 uur 's avonds. Noem dit tijdstip $t = 0$. De hoogte van de paddenstoel is op dat moment 1 cm en neemt per uur met 14% toe. Deze paddenstoel kan maximaal 12 cm hoog worden.

- a Hoe hoog is de paddenstoel om 02:00 uur 's nachts? Geef je antwoord in millimeters nauwkeurig.
- b Wat is de groeifactor per drie uur? Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.
- c Met hoeveel procent is de hoogte van de paddenstoel toegenomen tussen 23:00 uur 's avonds en 6:00 uur in de ochtend? Geef je antwoord in hele procenten.
- d Hoeveel hele uren kan de paddenstoel blijven groeien?

Opgave 12

Schrijf als één macht.

- a $\frac{(2^{30})^{12} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}}$
- b $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{10} \cdot 27^{24}}$
- c $\frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25}$
- d $\frac{(49^8)^{10}}{7^{100} \cdot 343^{20}}$

Opgave 13

Op 1 januari 2010 heeft stad A 250000 inwoners. Het aantal inwoners groeit met 2,5% per jaar. Op 1 januari 2008 heeft stad B 300000 inwoners. Het aantal inwoners groeit in deze stad met 5000 per jaar.

- a Stel een formule op van het aantal inwoners N_A van stad A. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.
- b Stel een formule op van het aantal inwoners N_B van stad B. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010.
- c Hoeveel procent inwoners had stad B op 1 januari 2012 meer dan stad A? Geef je antwoord in hele procenten.
- d In welk jaar heeft stad A voor het eerst meer inwoners dan stad B?

Toepassen

Opgave 14: Beleggen in aandelen

Een kapitaal van € 10415,00 wordt gedurende tien jaar belegd in aandelen. In de tabel zie je de groei van het kapitaal in de eerste zes jaar.

tijd (jaar)	0	1	2	3	4	5	6
kapitaal (euro)	10415	10850	11295	11760	12250	12750	13280

Tabel 4

Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.

- a Maak duidelijk dat het kapitaal in de eerste zes jaar bij benadering exponentieel toeneemt.

- b** Bereken voor deze periode het rendement (per jaar).
- c** Maak een tabel van een kapitaal van € 10000,00 dat tien jaar wordt belegd bij een rendement van 8% per jaar.
- d** Na hoeveel jaar is dit kapitaal verdubbeld?
- e** Iemand belegt een kapitaal van € 10000,00 gedurende tien jaar. Stel dat hij de eerste vijf jaar een rendement van 14% per jaar haalt en de daarop volgende vijf jaar 4% per jaar. Bereken het kapitaal na vijf jaar en na tien jaar.
- f** Laat met een berekening zien of het de belegger meer oplevert in vergelijking met de vorige situatie als het rendement de eerste vijf jaar 4% is en de volgende vijf jaar 14%.

Testen

Opgave 15

Voor een bepaald type woning betaal je een huur van € 950,00 per maand. Er wordt een jaarlijkse huurverhoging verwacht van 4%.

- a** Stel een formule op waarmee je voor volgende jaren de huur per maand kunt berekenen.
- b** Maak een tabel waarin je kunt zien hoe lang het duurt tot de huur hoger wordt dan € 1300,00 per maand.
- c** Hoe groot is de groeifactor van de maandelijkse huur per vier jaar? Rond af op twee decimalen.
- d** Bereken met behulp van de groeifactor per vier jaar de groeifactor per twintig jaar.
- e** Bereken het groeipercentage per twintig jaar.
- f** Na hoeveel jaar is de huur per maand voor het eerst meer dan verdubbeld?

Opgave 16

Schrijf als één macht: $\frac{17^{11} \cdot 17^{54}}{(17^4)^{16}}$.

Opgave 17

Iemand koopt voor € 5000,00 aandelen. In de volgende jaren blijkt dat de aandelen elk jaar 12 procent in waarde dalen.

- a** Stel een functievoorschrift op voor de waarde van de aandelen $W(t)$, waarin t de tijd in jaren sinds de aankoop van de aandelen.
- b** Na hoeveel jaar is de waarde van de aandelen minder dan € 1000,00 geworden?
- c** Bereken het groeipercentage per vijf jaar.
- d** Met welk getal moet je de waarde van de aandelen na vijf jaar vermenigvuldigen om de waarde na tien jaar te krijgen? Bereken de waarde na tien jaar.
- e** Bereken het groeipercentage per tien jaar.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
