

4.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Veeltermfuncties**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- abc-formule;
- veeltermfunctie — derdegraads, hogere graads functies;
- ongelijkheid.

Activiteitenlijst

- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- kwadratische functies schrijven als machtsfuncties — de abc-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met veeltermfuncties — hogere graads vergelijkingen oplossen;
- ongelijkheden systematisch oplossen.

Achtergronden

Een kwadraat is (de oppervlakte van) een vierkant, in de Oudheid werden kwadraten altijd door vierkanten voorgesteld. En (vierkants)wortels zijn de lengten van de zijden van een vierkant. Heel lang kon daar alleen meetkundig mee worden gemanipuleerd, want in de Oudheid waren de enige getallen 1, 2, 3, ... en de verhoudingen van die getallen (breuken dus). En daarmee was bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ geen getal, het kon alleen worden benaderd met getallen. Hetzelfde gold voor kubussen (derde machten zouden wij zeggen) en kubische wortels (derdemachts wortels). Maar heel af en toe waren dat getallen, meestal niet. Toch werd met dergelijke machten gewerkt, maar steeds als vierkant of kubus. Ook gewone getallen (meetbare getallen) waren eigenlijk concrete lengtes net als wortels en π (onmeetbare getallen). Tot ruim voorbij de Middeleeuwen werd op die manier over getallen gedacht.

Vergelijkingen werden geformuleerd in termen van 'een vierkant en een lengte zijn samen 90, hoe groot is die lengte?'. Nu noteer je dat als $x^2 + x = 90$ en dan wil je weten hoe groot x is. Na de Griekse wiskundige **Diophantos** hielden vooral geleerden uit het grote Islamitische Rijk dat van 622 tot 1450 het Midden-Oosten domineerde zich met het oplossen van kwadratische vergelijkingen bezig. De wiskundige **Al-Khwarizmi** bedacht de abc-formule, hoewel hij totaal andere notaties gebruikte.

Pas veel later ontstonden in West-Europa de moderne notaties zoals de gewoonte om letters te gebruiken voor variabelen en het wortelteken. Ook werd het getalbegrip verruimd, zodat alle wortels als getallen werden opgevat.



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x - 1)^2$.

- Laat zien door welke transformaties de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^2$.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de coördinaatassen.
- Los algebraïsch op: $f(x) = -712$.
- Los algebraïsch op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

- a $-0,5(x - 2)^2 + 45 \leq 4,5$
- b $x(x - 2) = 3x - 6$
- c $x^3 - 4x^2 = 10x$
- d $6 - 0,001(x - 3)^3 = 5$
- e $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$
- f $(x^2 - 9)(x - 2)^3 > 0$

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 8 + 4px - px^2$.

- a Neem $p = 1$ en bereken de karakteristieken van de grafiek van f met behulp van kwadraat afsplitsen.
- b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x -as?
- c Voor welke waarde(n) van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 50 - 2x$?

Opgave 4

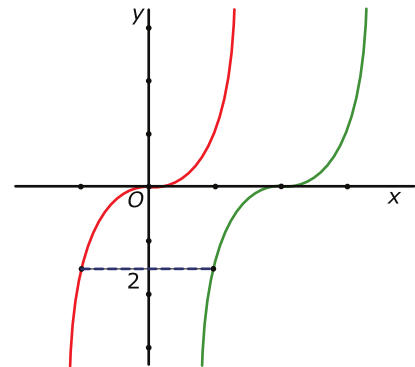
Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De maximale hoogte van de vuurpijl is 122,5 meter en die hoogte bereikt hij na 5 seconden. Er bestaat een kwadratisch verband tussen de hoogte van de vuurpijl h in meters vanaf de grond en de tijd t in seconden.

- a Toon aan dat het functievoorschrift van $h(t)$ gegeven wordt door $h(t) = -4,9t^2 + 49t$.
- b Als de vuurpijl niet uit elkaar spat, na hoeveel seconden is hij dan weer op de grond?
- c De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Bereken algebraïsch hoelang de vuurpijl op een hoogte van meer dan 30 meter is. Rond af op één decimaal.

Opgave 5

Bekijk de grafiek van $y_1 = x^3$ en de grafiek van y_2 . De grafiek van y_2 ligt rechts van die van y_1 zo, dat alle verbindingslijnstukken evenwijdig aan de x -as de lengte 2 hebben.

- a Geef het functievoorschrift van y_2 .
- b De functie $v(x)$ stelt de lengte voor van de verbindingslijnstukken die evenwijdig lopen aan de y -as. Toon aan dat $v(x) = 6x^2 - 12x + 8$.
- c Voor welke waarden van x is de lengte van het verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y -as minder dan 8?
- d Bepaal de lengte van het kortste verbindingslijnstuk evenwijdig aan de y -as.



Figuur 2

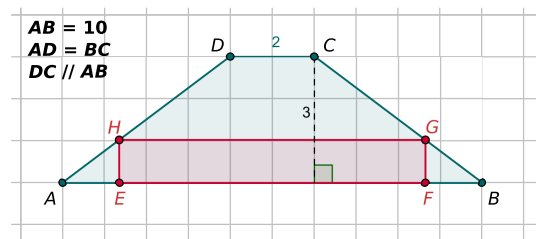
Toepassen

Opgave 6: Boekenkast

Boven op zolder, onder het schuine dak, maak je een rechthoekige boekenkast op zolder. Neem aan dat de zolder 10 m breed is en 3 m hoog is. De vorm van de zijmuur $ABCD$ waar de boekenkast tegenaan komt is een symmetrisch trapezium. Wanneer is de oppervlakte van het vooraanzicht $EFGH$ van de boekenkast zo groot mogelijk?

Bekijk de applet: [boekenkast](#)

- Experimenteer eerst met de applet.
Bestudeer de figuur.
- Kies een geschikte variabele en leidt een formule af voor de oppervlakte K van het vooraanzicht.
- Bereken met behulp van die formule de maximale waarde van K .

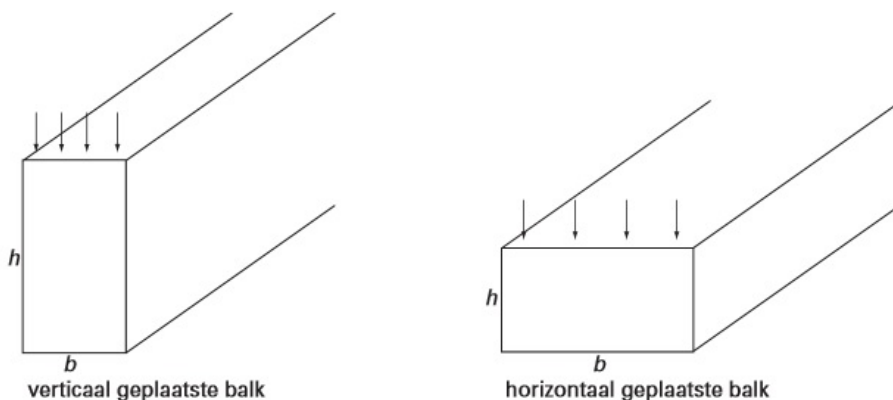


Figuur 3

Examen

Opgave 7: Sterkte van een balk

In een bouwconstructie worden houten balken door verticale krachten belast. De sterkte van zo'n balk hangt dan af van zijn afmetingen en de gebruikte houtsoort. We bekijken liggende balken met een rechthoekige doorsnede. Balken kunnen op twee manieren worden neergelegd: met de lange rechthoekszijde horizontaal of verticaal. We noemen dit horizontaal of verticaal geplaatste balken. Zie figuur. De richting van de krachten is aangegeven met pijlen.



Figuur 4

Voor de sterkte S van een balk van een bepaalde houtsoort geldt de formule: $S = 0,12 \cdot b \cdot h^2$. Hierbij is b de basis in cm en h de hoogte van de dwarsdoorsnede in cm.

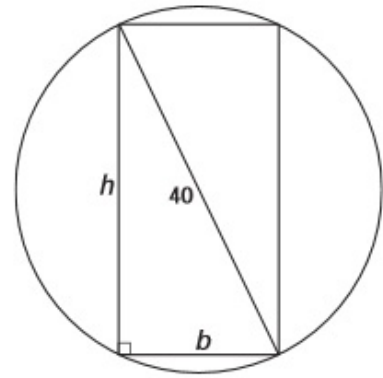
Een balk van deze houtsoort heeft een rechthoekige dwarsdoorsnede van 24 cm bij 6 cm. Deze balk kan in verticale en in horizontale stand worden geplaatst.

- In welke stand is de sterkte het grootst? Licht je antwoord toe.
De oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van een balk van deze houtsoort is gelijk aan 60 cm^2 . Voor de sterkte S geldt: $S = 100$.
- Bereken de afmetingen h en b van deze dwarsdoorsnede. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

Uit een cilindervormige boom van dezelfde houtsoort wil men een balk zagen met basis b en hoogte h . Voor deze balk geldt nog steeds de formule $S = 0,12 \cdot b \cdot h^2$. De cirkelvormige dwarsdoorsnede heeft een diameter van 40 cm. Zie de figuur hiernaast.

- c Laat zien dat in deze situatie voor de sterkte de formule $S = 192b - 0,12b^3$ kan worden gevonden.
- d Bereken de afmetingen h en b van de dwarsdoorsnede met de grootste sterkte. Geef h en b in één decimaal nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B in 2002, eerste tijdvak)



Figuur 5

Opgave 8: Modderstroom

Er zijn vulkanen die geen lava uitspuwen, maar een constante stroom modder geven. De koude modder stroomt als een rivier langzaam de helling af (zie bovenste foto). Aan de rand van deze stroom droogt de modder op. Daar stroomt de modder dus wat langzamer dan in het midden. Dit is te zien aan het geribbelde patroon.

Om dit snelheidsverschil te meten, gebruiken geologen stenen die ze op de modderstroom leggen. Bij een modderstroom van ruim 6 dm breed gebeurt dat als volgt. Een geoloog legt een rij van 7 stenen dwars in de stroom. Elke steen krijgt een nummer van 0 t/m 6. Steen nummer 0 legt hij vlak bij de rand van de stroom. Het midden van steen nummer 1 legt hij op 1 dm van het midden van steen nummer 0. De afstand tussen de middens van opeenvolgende stenen is steeds 1 dm. Steen nummer 6 ligt vlak bij de andere rand. Het resultaat zie je op de onderste foto.

Elk uur meet hij de afstand die de stenen door de stroom hebben afgelegd. In de onderstaande figuren zie je de ligging na één uur en na drie uur.

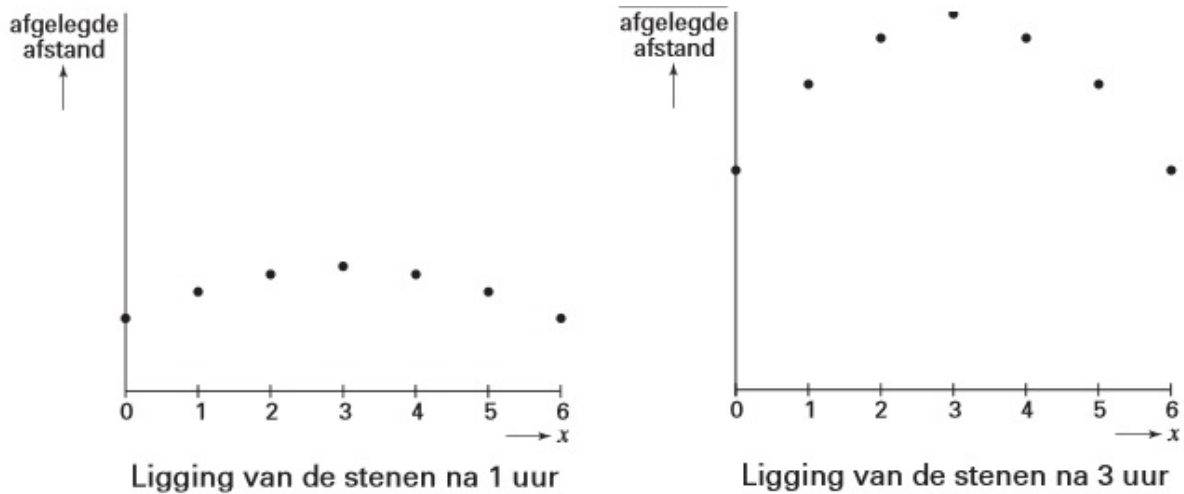


Figuur 6

De afstand A (in dm) die de stenen na één uur hebben afgelegd, wordt beschreven door de formule:

$$A = -0,1x^2 + 0,6x + 19,4$$

Hierbij is x de afstand in dm van het midden van een steen tot het midden van steen 0 bij het begin van het proces.

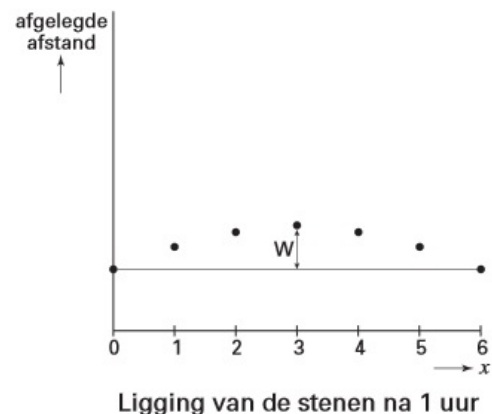


Figuur 7

- a** Bereken de afstand die steen nummer 2 het eerste uur heeft afgelegd.
De stenen gaan met de modder mee de berg af. Elke steen heeft zijn eigen constante snelheid.
- b** Van welke stenen ligt die snelheid het dichtst bij 20 dm per uur? Licht je antwoord toe met een berekening.

De geoloog heeft de stenen op een rechte lijn loodrecht op de stroomrichting gelegd. Steen nummer 3 zal door de stroom sneller vooruit komen dan de andere stenen. Het weglengteverschil W dat op die manier tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur ontstaat, is afgebeeld in de figuur hiernaast.

- c** Toon aan dat het weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 na één uur 9 cm is.
Op een gegeven moment meet de geoloog een weglengteverschil W tussen steen nummer 3 en steen nummer 6 van 83 cm.



Figuur 8

- d** Bereken de totale afgelegde weg van de steen met nummer 3, gerekend vanaf de plek waar de geoloog de stenen in de modderstroom gelegd heeft. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

(bron: examen havo wiskunde B in 2005, eerste tijdvak)

Opgave 9: Halve cirkel en derdegraads functie

Bekijk de functies f en g : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $g(x) = -\frac{1}{30}x^3 + x^2 - 1,9x + 1,58$.

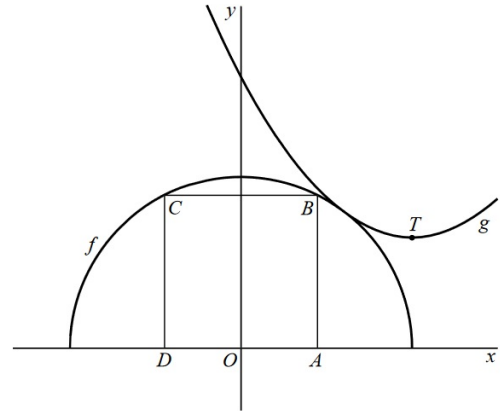
De grafieken van f en g lijken elkaar te raken. Bekijk de figuur.

De grafieken van f en g raken elkaar echter niet. De vergelijking $f(x) = g(x)$ heeft twee oplossingen.

- a Los op voor welke x geldt $f(x) \leq g(x)$. Rond de grenswaarden van x zo nodig af op twee decimalen.
- b Het punt T in de figuur is een top van de grafiek van de functie g .

Bepaal de x -coördinaat van het punt T . Rond zo nodig af op twee decimalen.

(naar: examen havo wiskunde B in 2008, tweede tijdvak)



Figuur 9



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
