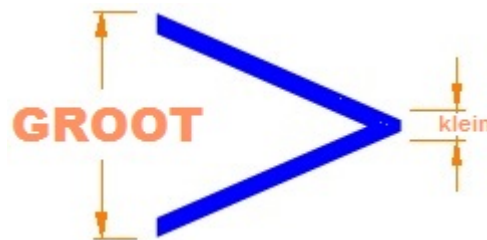


4.4 Ongelijkheden

Inleiding

Als je wilt weten bij welke windsnelheid een windmolen meer dan bijvoorbeeld 20 kW aan vermogen levert, dan moet je een ongelijkheid oplossen. Hetzelfde geldt als je wilt weten vanaf hoeveel gereden km per jaar een auto op benzine duurder is dan één op diesel. Over het oplossen van ongelijkheden gaat dit onderdeel.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden systematisch oplossen.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- de karakteristieken van een functie bepalen en zo de grafiek goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

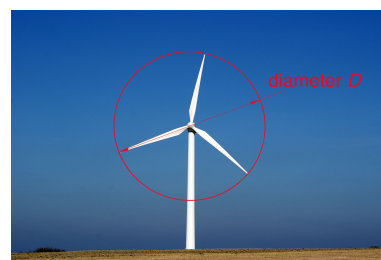
Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de wielengte (dat is de halve diameter van de rotor) en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en 0,052 een getal dat afhangt van het type molen.

- Stel, je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- Hoe ga je zo'n ongelijkheid oplossen?



Figuur 2

Uitleg

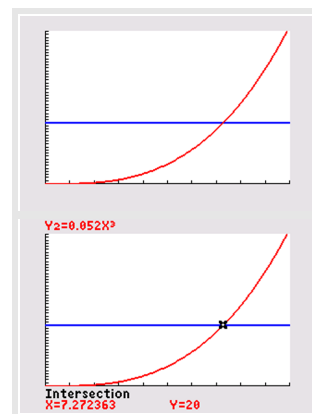
Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, is afhankelijk van de wielengte en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt) en v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s. Stel je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Daarbij hoort de **ongelijkheid**: $0,052v^3 > 20$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Het oplossen van zo'n ongelijkheid gaat prima met de grafische rekenmachine:

- Je voert $Y1=20$ en $Y2=0.052X^3$ in en brengt ze goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7,272\dots; 20)$.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid af uit de figuur: $v > 7,27$.

Belangrijk is het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v \geq 7,3$. Want bij 7,2 is het vermogen nog niet meer dan 20 kW.



Figuur 3

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de ongelijkheid $0,052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt de grafische rekenmachine gebruikt.

- a** Los zelf de ongelijkheid op met de grafische rekenmachine.

Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0,052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.

- b** Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.
- c** Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies f en g met $f(x) = 0,01x(x^2 - 400)$ en $g(x) = x$. In deze opgave ga je de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ oplossen.

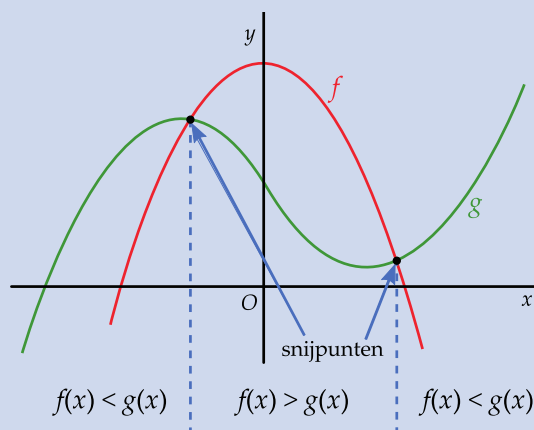
- a** Hoe moet je het venster van de grafische rekenmachine instellen om goede grafieken bij deze ongelijkheid te krijgen? Hoeveel snijpunten hebben beide grafieken?
- b** Los nu de ongelijkheid met de grafische rekenmachine op in twee decimalen nauwkeurig.
- Om zeker te weten dat je alle snijpunten van de grafieken hebt gevonden, kun je de bijbehorende vergelijking beter algebraïsch oplossen. Wil je een ongelijkheid algebraïsch oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op en lees je daarna de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.
- c** Los de bij deze ongelijkheid horende vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$, enzovoort, heet een **ongelijkheid**. Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst voer je beide functies op de grafische rekenmachine in.
- Vervolgens breng je ze goed in beeld. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bepaal je de snijpunten. Dat kan met de grafische rekenmachine. Dat kan vaak ook door de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op te lossen. Soms is dit handiger of wordt het zo gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Reken door met de maximale nauwkeurigheid van de grafische rekenmachine en rond alleen af als dat wordt gevraagd en aan het einde van je uitwerking.



Figuur 4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord



Figuur 5

Bekijk eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$. Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk.

De snijpunten vind je door de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ op te lossen. Je vindt: $x = -10 \vee x = 6$. Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.

Opgave 3

Je gaat in deze opgave de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$ exact oplossen.

- Los de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ algebraïsch op.
- Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op. De oplossing bestaat uit twee delen!

Voorbeeld 2

Een verhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00. De inkoopprijs van de verf en de kosten van het mengproces samen komen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,25 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK . Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden.

Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

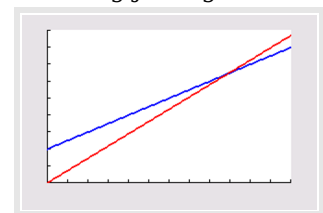
Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7,25q$. De variabele q is de verkochte hoeveelheid verf.

Nu moet: $TO > TK$, dus $7,25q > 2000 + 5q$. Met de grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK goed in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn.

Vervolgens bereken je dit snijpunt algebraïsch: $7,25q = 2000 + 5q$ geeft $2,25q = 2000$ en dus $q \approx 888,9$ liter.

De oplossing lees je uit de grafiek af: vanaf 889 liter verf maakt de verfhandaelaar winst.



Figuur 6

Opgave 4

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter elektrisch kunt gaan rijden. Je huidige benzinekosten per kilometer zijn ongeveer 12,5 eurocent.

- Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).
Een elektrische auto kost € 10.000 meer dan de benzinevariant. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want je rijdt ongeveer 100 km met 16 kWh elektriciteit en elke kWh kost € 0,22.
- Stel een formule op voor de kosten (E) afhankelijk van het aantal kilometers (a), waarbij je de meer-kosten mee rekent.

- c Je wilt weten hoeveel kilometer je moet rijden om goedkoper uit te zijn. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- d Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometers nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = 4x$.

Los algebraïsch op: $f(x) > g(x)$.

Antwoord

Eerst los je de vergelijking $x^3 = 4x$ op:

$$x^3 = 4x$$

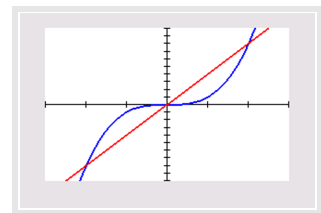
$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0$$

Je vindt $x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$.

Vervolgens maak je de grafieken van $y_1 = x^3$ en $y_2 = 4x$ op de grafische rekenmachine. Zorg dat alle snijpunten in beeld komen.

Ten slotte lees je de oplossing uit de grafiek af. De blauwe grafiek moet boven de rode grafiek liggen, dus je vindt $-2 < x < 0 \vee x > 2$.



Figuur 7

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je algebraïsch de ongelijkheid $x^3 < 4x$ oplost.

- a Welke oplossing heeft de ongelijkheid $x^3 \leq 4x$?
Bekijk nu de ongelijkheid $x^3 < x^2$.
- b Los de ongelijkheid algebraïsch op.

Verwerken

Opgave 6

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a $5(x - 1)^2 - 9 > 11$
- b $x^3 > x$
- c $x^3 \leq 80x - 2x^2$
- d $-2x^2 < 8 - x$
- e $\frac{8}{x^2} \geq x$
- f $x^2 - 4x > -3$

Opgave 7

Een winkelier koopt maandelijks fietsen in voor € 300,00 per stuk. Deze slaat hij op in een magazijn. Voor het gebruiken van dit magazijn betaalt hij een huur van € 950,00 per maand. Daarnaast heeft hij personele kosten van € 5200,00 per maand. Hij verkoopt de fietsen voor € 425,00 per stuk.

- a Hoeveel fietsen moet de winkelier in een maand verkopen wil hij die maand winst maken? Ga ervan uit dat hij alle fietsen die hij inkoopt dezelfde maand nog verkoopt.
- b In een maand heeft de winkelier 200 fietsen gekocht. Hoeveel van die fietsen moet hij minstens verkopen om alle kosten van die maand te dekken?

Opgave 8

Twee auto's rijden op de A1, beide met (ongeveer) constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt, ligt hij 24 kilometer achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt, is $t = 0$. De afstand (kilometer) tot Deventer wordt voorgesteld door $a(t)$.

- Stel bij beide auto's een lineaire functie voor $a(t)$ op.
- Bereken na hoeveel minuten auto A door auto B wordt ingehaald.
- Bereken algebraïsch hoelang hun onderlinge afstand minder dan 4 kilometer is.

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

- Los algebraïsch op: $f(x) \leq 0$.
- Los algebraïsch op: $f(x) < 36$.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + px + 12$ en $g(x) = -x + 9$.

- Voor welke exacte waarden van p snijdt de grafiek van f de x -as twee keer?
- Neem $p = 3$ en los de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ algebraïsch op.

Toepassen

Opgave 11: Smart ForTwo

Je rijdt al een Smart Fortwo voor € 4,00 per dag! Stel je hebt op 1 januari 2015 een Smart gekocht en betaalt hiervoor € 4,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 2,5 eurocent per gereden kilometer kun je daarvoor een abonnement afsluiten waar vrijwel alle onderhoudskosten mee worden afgedekt. Je hebt dan dus alleen nog benzinekosten. Je kunt met 1 liter benzine 20 kilometer rijden en 1 liter benzine kost ongeveer € 1,60.



Figuur 8

- Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?
- Hoeveel kost deze Smart je per jaar als je er 16000 kilometer per jaar mee rijdt?
- Stel een ongelijkheid op bij de vraag: Hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je minder dan € 5000,00 kwijt wilt zijn dat jaar? Los daarna die ongelijkheid algebraïsch op.
- Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 2,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 20000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je alsof je 20000 km/jaar rijdt. Stel de formule op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Testen

Opgave 12

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op:

- $6 - x < x^2$
- $\frac{1}{x} \geq 0,25x$
- $(2x - 6)^2 < 16$

Opgave 13

De afstand Utrecht - Enschede is voor een fietser 144 kilometer. Fietser A gaat met 18 km/h van Utrecht naar Enschede. Fietser B gaat met 24 km/h van Enschede naar Utrecht. Beide fietsers starten tegelijkertijd. Je wilt weten hoe lang fietser A dichterbij Utrecht is dan fietser B.

- a Welke ongelijkheid hoort daar bij als t de tijd in uren is?
- b Los deze ongelijkheid algebraïsch op.
- c Beantwoord de vraag in minuten nauwkeurig.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - x^3$ en $g(x) = (x - 1)^2$.

- a Bereken met de grafische rekenmachine de snijpunten van de grafieken van f en g in twee decimalen nauwkeurig.
- b Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van ongelijkheden**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
