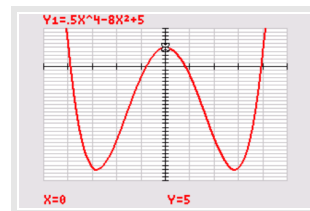


4.3 Veeltermen

Inleiding

Alle kwadratische functies hebben een grafiek met dezelfde vorm als de functie $f(x) = x^2$. Je kunt je ook wel functies voorstellen die bestaan uit een optelling van machtsfuncties met hogere machten, zoals bijvoorbeeld $g(x) = x^3 - 4x$ of $h(x) = 0,5x^4 - 8x^2 + 5$. Dergelijke functies heten veeltermfuncties, want het functievoorschrift is een veelterm (of polynoom). En je kunt je afvragen hoe het zit met hun grafieken...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met veeltermen en vergelijkingen met veeltermen oplossen;
- toepassingen van veeltermfuncties.

Voorkennis

- werken met machtsfuncties en kwadratische functies in het algemeen;
- vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven de veeltermfunctie g met functievoorschrift $g(x) = x^3 - 4x$.

- Welke karakteristieken heeft de grafiek van g ? Gebruik je grafische rekenmachine.
- Schrijf domein en bereik van g op.
- Kun je de nulpunten en de toppen ook algebraïsch berekenen? Waarom is dit belangrijk?

Uitleg 1

Bekijk de applet: machtsfuncties

Functies van de vorm $f(x) = x^n$ zijn machtsfuncties.

Bekijk de grafieken voor bijvoorbeeld van $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Het verloop van de grafiek hangt af van de waarde van n .

- Als n positief en even is, dan is de grafiek dalvormig en lijnsymmetrisch. De symmetrieas is de y -as. De coördinaten van de top zijn $(0, 0)$. Voor het domein en bereik van de functie geldt $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \infty)$.
- Als n positief en oneven is, dan is de grafiek stijgend voor elke waarde van x (behalve bij $x = 0$) en puntsymmetrisch in $(0, 0)$. Dit punt wordt het symmetriepunt genoemd. Voor het domein en bereik van de functie geldt $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$.

De grafieken van functies zoals $f(x) = 2(x - 5)^n - 1$ ontstaan door transformaties uit die van $y = x^n$. Vergelijkingen bij dergelijke functies los je op door terugrekenen. Dat gaat met een n de machtswortel:

$x^n = c$ geeft $x = \sqrt[n]{c}$ als n oneven is.

$x^n = c$ geeft $x = -\sqrt[n]{c} \vee x = \sqrt[n]{c}$ als n even is.

Met je grafische rekenmachine kun je dergelijke wortels berekenen.



Figuur 2

Opgave 1

Bekijk de grafieken van de functies: $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^4$.

- a Geef het domein en bereik van beide functies.
- b Van welke functie is de grafiek lijnsymmetrisch en van welke puntsymmetrisch? Geef ook de symmetrieas en het punt van symmetrie.

Gegeven de functie $h(x) = -4(x - 2)^4 + 6$.

- c Uit welk van beide machtsfuncties f en g kan de grafiek van h door transformatie ontstaan? En welke transformaties moet je dan toepassen?
- d Bereken algebraïsch de nulpunten en de top van h .

Opgave 2

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

- a $x^6 = 22$
- b $2x^7 = 40$
- c $-5x^5 = 30$
- d $-3(x + 4)^5 + 6 = 12$

Uitleg 2

De functie $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 12x$ is een voorbeeld van een veeltermfunctie. Elke uitdrukking die bestaat uit een optelling of aftrekking van machtsfuncties met een gehele positieve exponent en eventueel een constant getal heet namelijk een veelterm (of polynoom).

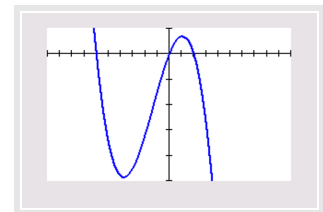
Om de grafiek goed in beeld te krijgen, wil je vooraf weten welke nulpunten en toppen er zijn.

In dit geval kun je nulpunten algebraïsch berekenen:

$$-x^3 - 4x^2 + 12x = 0 \text{ geeft } -x(x^2 + 4x - 12) = 0.$$

Ontbinden in factoren levert $-x(x + 6)(x - 2) = 0$, dus $x = 0 \vee x = -6 \vee x = 2$.

De enige snijpunten met de x -as zijn $(-6, 0)$, $(0, 0)$ en $(2, 0)$. Hoe je de toppen kunt berekenen, leer je later. Nu bekijk je eerst even de tabel op je grafische rekenmachine tussen de nulpunten. Je ziet dan dat je de grafiek goed in beeld krijgt met venster $[-10, 10] \times [-50, 10]$.



Figuur 3

Opgave 3

Bekijk [Uitleg 2](#).

- a Bepaal met de grafische rekenmachine beide toppen van de grafiek in twee decimalen nauwkeurig.
- b Bereken de exacte snijpunten van de grafiek van f met de parabool $y = -4x^2$.

Opgave 4

Gegeven is de veeltermfunctie g met $g(x) = 0,5x^4 - 8x^2$.

- a Bereken algebraïsch de drie nulpunten van deze functie.
- b Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van g met de grafische rekenmachine. Rond waar nodig af op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: machtsfuncties

Functies van de vorm $f(x) = x^n$ zijn **machtsfuncties**. Het verloop van de grafiek hangt af van de waarde van n .

Als n een positief even getal is, dan heeft f de volgende karakteristieke eigenschappen:

- $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [0, \rightarrow)$
- de grafiek is dalend als $x < 0$ en stijgend als $x > 0$
- de **symmetrieas** van de grafiek is de y -as
- de top is $(0,0)$

Als n een positief oneven getal is, dan heeft f de volgende karakteristieke eigenschappen:

- $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \mathbb{R}$
- de grafiek is stijgend voor elke waarde van x (behalve bij $x = 0$)
- de grafiek is puntsymmetrisch in het punt $(0,0)$, daarom wordt dit het **symmetriepunt** genoemd.

De grafieken van de vorm $g(x) = a(x - p)^n + q$ ontstaan door transformaties uit de grafiek van $f(x) = x^n$.

De vergelijking $x^n = c$ met n een positief geheel getal heeft de volgende oplossingen:

- als n even is en $c > 0$, dan zijn er twee oplossingen: $x = -\sqrt[n]{c}$ en $x = \sqrt[n]{c}$
- als n even is en $c = 0$, dan is er één oplossing en dat is tevens de top van de grafiek: $x = 0$
- als n even is en $c < 0$, dan zijn er geen oplossingen
- Als n oneven is, dan is er altijd één oplossing: $x = \sqrt[n]{c}$

$\sqrt[n]{c}$ spreek je uit als **n-de machtswortel** van c .

Functies zoals $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 10$ heten **veeltermfuncties**. Om daarvan de karakteristieken te berekenen heb je vaak gevorderde wiskundige technieken nodig. Maar soms kun je hier ook met behulp van ontbinden in factoren uitkomen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = -0,1(x - 4)^3 + 10$

Bepaal eerst de karakteristieke eigenschappen van f en plot daarna met de grafische rekenmachine de grafiek. Bereken het nulpunt van f .

Antwoord

De grafiek van f ontstaat door transformaties uit de grafiek van $y = x^3$.

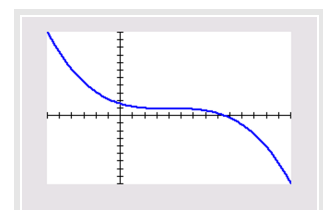
Achtereenvolgens:

- translatie van 4 t.o.v. de y -as;
- vermenigvuldiging t.o.v. de x -as met factor $-0,1$;
- translatie van 10 t.o.v. de x -as.

Het domein en bereik van f is daarom $\mathbb{R}$ en de grafiek van f is puntsymmetrisch.

Door de negatieve factor $-0,1$ voor $(x - 4)^3$ is de grafiek dalend voor elke waarde van x (behalve bij $x = 4$). Het punt van symmetrie kun je uit het functievoorschrift aflezen: $(4,10)$

Venster bijvoorbeeld: $[-6,14] \times [-90,110]$



Figuur 4

Het nulpunt bereken je door $f(x) = 0$ op te lossen:

$$-0,1(x - 4)^3 + 10 = 0$$

$$(x - 4)^3 = 100$$

$$x - 4 = \sqrt[3]{100}$$

$$x = \sqrt[3]{100} + 4$$

Het exacte nulpunt is $x = \sqrt[3]{100} + 4$.

Opgave 5

Gegeven is de functie: $f(x) = 3(x - 5)^4 - 6$

- a Bereken exact de nulpunten van f .
- b Los exact op: $f(x) = 21$
- c Voor welke waarden van c heeft de vergelijking $f(x) = c$ geen oplossing?

Opgave 6

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a $5(x - 1)^6 + 1 = 26$
- b $-(x + 3)^5 - 2 = 15$
- c $\frac{1}{4}(x + 2)^9 + 100 = -28$
- d $-2(x - 5)^4 + 15 = 3$

Opgave 7

Een grafiek is door translaties en een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as ontstaan uit de grafiek van $y = x^4$. De top van de grafiek is $(5, 8)$ en de grafiek gaat ook door $(3, 12)$.

Stel een formule op voor deze grafiek.

Voorbeeld 2

Los algebraïsch op: $x^5 = 12x$.

Rond af op twee decimalen.

Antwoord

$$x^5 = 12x$$

$$x^5 - 12x = 0$$

$$x(x^4 - 12) = 0$$

$$x = 0 \vee x^4 - 12 = 0$$

$$x = 0 \vee x^4 = 12$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt[4]{12} \vee x = -\sqrt[4]{12}$$

$$x = 0 \vee x \approx 1,86 \vee x \approx -1,86$$

Opgave 8

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a $x^4 - x^2 = 0$
- b $5x^8 = x^3$
- c $x^4 + 5x^3 = -6x^2$

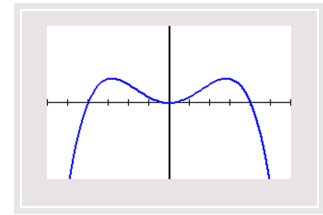
Voorbeeld 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = -0,5x^4 + 800x^2$.
Hoeveel toppen heeft deze functie?

Antwoord

Om vast te stellen hoeveel toppen er zijn, breng je de grafiek van f met alle karakteristieken in beeld. Het is handig om eerst de nulpunten te berekenen: $-0,5x^4 + 800x^2 = 0$ geeft $-0,5x^2(x^2 - 1600) = 0$ en dus $x = -40 \vee x = 0 \vee x = 40$.

Er zijn drie nulpunten, te weten: $(0,0)$, $(-40,0)$ en $(40,0)$. De grafiek komt met alle karakteristieken in beeld met een venster van $[-60,60] \times [-1000000,1000000]$. Er zijn drie toppen die je door de rekenmachine kunt laten bepalen.



Figuur 5

Opgave 9

Derdegraadsfuncties hebben de vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$.

- Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?
- Neem $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?
- Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?
- Neem $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$ en $d = 0$. Hoeveel nulpunten heeft f dan? En hoeveel toppen?
- Hoeveel nulpunten en hoeveel toppen heeft een derdegraadsfunctie maximaal?

Opgave 10

Bekijk de vierdegraadsfunctie $f(x) = 2x^4 - 512x^2$. Je wilt de nulpunten en de toppen van de grafiek van f bepalen.

- Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- Bij welke vensterinstellingen krijg je nu de grafiek van f goed in beeld?
- Hoeveel toppen zijn er? Bepaal de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig met de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven zijn de functies: $f(x) = 0,25(x - 3)^4 + 50$ en $g(x) = 2(x + 1)^5 - 100$.

- Van welke functie is de grafiek lijnsymmetrisch en van welke puntsymmetrisch? Geef ook de symmetrieas of het punt van symmetrie.
- Geef het domein en bereik van beide functies.
- Los op met de grafische rekenmachine: $f(x) = g(x)$.

Opgave 12

Los algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- $4x^5 = -12$
- $60 - 0,5x^4 = 0$
- $(x - 1)^8 + 5 = 10$
- $-(x - 2)^7 + 5 = 15$
- $10(x + 6)^4 - 22 = 138$

f $-5(x-3)^6 + 18 = -2$

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a $x^3 - 4x^2 = 21x$
- b $x(x^3 - 1) = 7x$
- c $x(6 - x)(x + 5) = 0$
- d $2x^4 - 12x = -18x$
- e $x^4 - 7x^3 + 10x^2 = 0$

Opgave 14

Gegeven zijn de functies f en g door: $f(x) = 2x^5 - 4x^3$ en $g(x) = 5x^4$.

- a Bereken exact de nulpunten van f .
- b Los algebraïsch op $f(x) = g(x)$. Rond af op twee decimalen.

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = (x^2 - 4)^2 - 100$

- a Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- b Geef de extremen van f .
- c Los exact op: $f(x) = -91$.
- d Voor welke waarden van c heeft de vergelijking $f(x) = c$ geen oplossing?

Toepassen

In een bepaald **economisch model** wordt als voorbeeld een landbouwer genomen die bieten verbouwt. Bieten moet je vrij houden van onkruid, dat heet 'wieden'. Hoe meer mensen gaan wieden, hoe beter de bieten groeien. Maar als er te veel mensen gaan wieden, lopen ze elkaar in de weg en vertrappen ze de bietenplantjes. De oogst Q (in honderden kg bieten) hangt af van het aantal werkers w volgens de formule $Q = -0,5w^3 + 9w^2$.

Hoeveel wieders kan deze landbouwer het beste inzetten als hij een zo groot mogelijke oogst wil hebben?

Opgave 16

Bij **Toepassen** gaat het over een economisch model waarin een derdegraadsfunctie voorkomt.

- a Breng de grafiek van $Q(w)$ in beeld.
- b Bepaal nu het antwoord op de gestelde vraag.

Opgave 17

ChemTech produceert een onkruidbestrijdingsmiddel. Voor de productiekosten per maand gelden de volgende gegevens:

q (duizenden kg per maand)	1	2	3	4	5	6
TK (euro per maand)	775	1000	1220	2000	4000	8000

Tabel 1

Variabele q is de geproduceerde hoeveelheid per maand in duizenden kg. TK zijn de totale kosten in euro's. ChemTech verkoopt dit middel voor € 2,25 per kilogram.

- a De bedrijfsleiding heeft voor de kostenfunctie deze formule bedacht: $TK = 100q^3 - 600q^2 + 1300q$. Laat zien dat deze formule redelijk goed bij de gegeven tabel past.

- b** Stel een formule op voor de totale winst TW afhankelijk van q . Ga ervan uit dat de geproduceerde hoeveelheid elke maand ook wordt verkocht.
- c** Bepaal met de grafische rekenmachine bij welke productie per maand de winst maximaal is. Wat is dan de maximale winst?

Testen

Opgave 18

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- a** $x^4 - 8x = 0$
- b** $-x^2(x - 5) = 2x^2$
- c** $20 - x^4 = 11$
- d** $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 36$

Opgave 19

Een bedrijf gebruikt voor de winst die het per maand maakt de formule $W = -q^3 + 9q^2 + 21q - 40$. Hierbij is q de productie in duizendtallen en W de winst in duizenden euro.

- a** Hoe hoog is de winst als het bedrijf 2500 producten maakt?
- b** Wat is de laagste productie waarbij het bedrijf € 100875,00 winst maakt?
- c** Bij welke productie is de winst maximaal? En wat is die maximale winst?

Opgave 20

De grafiek van f ontstaat door translaties en een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as uit de grafiek van $g(x) = x^4$. De top van de grafiek van f is $(4,6)$. De grafiek van f snijdt de y -as in $(0,1)$. Stel het functievoorschrift van f op.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
