

## 4.2 De abc-formule

### Inleiding

In het vorige onderdeel heb je gezien hoe je de vergelijking  $2(x-1)^2 - 5 = 3$  oplost door terug te rekenen. Dat terugrekenen lukt omdat de  $x$  maar op één plaats in de vergelijking voorkomt. Kwadratische vergelijkingen komen ook voor in een vorm waarin terugrekenen niet mogelijk is. Werk je namelijk de haakjes weg, dan krijg je  $2x^2 - 4x - 3 = 3$ . De  $x$  komt nu op meer plekken voor en terugrekenen is niet meer mogelijk. Door kwadraatafsplitsen kun je ook een formule afleiden waarmee een dergelijke vergelijking in één keer op te lossen is. Dat is de zogenaamde abc-formule.

#### Je leert in dit onderwerp

- nagaan hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking van de vorm  $ax^2 + bx + c = 0$  heeft;
- kwadratische vergelijkingen van de vorm  $ax^2 + bx + c = 0$  oplossen.
- kwadraat afsplitsen en zo de karakteristieken van een kwadratische functie bepalen.

#### Voorkennis

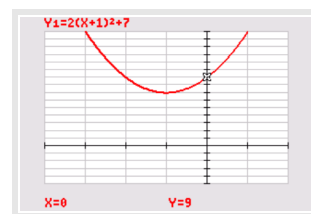
- kwadratische vergelijkingen van de vorm  $a(x-p)^2 + q = u$  oplossen.

### Verkennen

#### Opgave V1

Bekijk de grafiek van de functie  $g(x) = 2(x+1)^2 + 7$ .

- Schrijf het functievoorschrift van  $g$  in de vorm  $g(x) = ax^2 + bx + c$ .
- Hoe kun je met de grafische rekenmachine nagaan of je dit goed hebt gedaan?
- Hoe kun je aan een functievoorschrift van de vorm  $g$  in de vorm  $g(x) = ax^2 + bx + c$  zien of de grafiek een dal- of een bergparabool is?
- Hoe bepaal je de top van de grafiek van  $g$ ?



Figuur 1

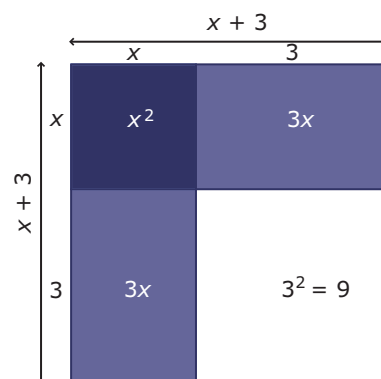
#### Uitleg 1

De vergelijking  $x^2 + 6x = 16$  kun je niet oplossen door terug te rekenen. Maar bekijk de figuur eens. Zie je dat  $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 3^2$ ? Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als:  $(x+3)^2 - 9 = 16$ . En nu komt  $x$  weer op één plek voor en kun je terugrekenen:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 9 &= 16 \\(x+3)^2 &= 25 \\x+3 &= \pm 5 \\x &= -3 \pm 5\end{aligned}$$

De oplossing van deze vergelijking is dus  $x = 2 \vee x = -8$ .

De gebruikte techniek heet kwadraat afsplitsen.



Figuur 2

### Opgave 1

Bekijk de kwadratische functie  $f$  met functievoorschrift  $f(x) = x^2 - 6x + 1$ .

- a Schrijf  $f(x)$  in de vorm  $(x - q)^2 + p$  door een kwadraat af te splitsen.
- b Je weet nu de coördinaten van de top van de grafiek van  $f$ . Welke coördinaten zijn dit?
- c Bereken algebraïsch de nulpunten van de grafiek van  $f$  in twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 2

Splits van de functievoorschriften een kwadraat af.

- a  $f(x) = x^2 + 12x$
- b  $g(x) = x^2 - 8x + 15$
- c  $h(x) = 2x^2 - 12x - 12$
- d  $k(x) = -x^2 + 4x + 3$
- e  $m(x) = x^2 + 4x - 16$
- f  $k(x) = 3x^2 + 18x - 6$

## Uitleg 2

De techniek van een kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking  $3x^2 + 17x = 45$  op te lossen (door eerst te delen door 3). Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen een algemene formule opgesteld.

De vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  heeft als oplossing:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor  $a$ ,  $b$  en  $c$  invult. Deze formule kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen, maar de vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm  $ax^2 + bx + c = 0$  worden gezet.

Ga na dat de oplossing van  $3x^2 + 17x = 45$ , en dus  $3x^2 + 17x - 45 = 0$  is:

$$x = \frac{-17 + \sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17 - \sqrt{829}}{6}$$

De uitdrukking  $b^2 - 4ac$  onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat de discriminant in dit geval positief is, namelijk 829, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt de discriminant beter eerst uitrekenen.

### Opgave 3

Los de volgende vergelijkingen op.

- a  $3x^2 + 17x = 45$
- b  $x^2 - 6x + 1 = 0$
- c  $x^2 + 4x = 0$
- d  $4x^2 - 3x - 8 = 0$

### Opgave 4

- a Los de vergelijking  $3x^2 + 17x = 45$  op met kwadraat afsplitsen.
- b Probeer op dezelfde manier de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  op te lossen met kwadraat afsplitsen. Kun je zelf de abc-formule vinden?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

#### Bekijk de applet

Een algemene formule voor een **kwadratische functie** is:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Nu zie je aan het functievoorschrift niet meteen hoe hij door transformatie uit de machtsfunctie  $y = x^2$  kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de nulpunten van de bijbehorende parabool wilt vinden.

Door **kwadraat afsplitsen** kun je het functievoorschrift van  $f$  omzetten naar de vorm:  $f(x) = a(x - p)^2 + q$  waarin  $(p, q)$  de top van de grafiek is. Je gebruikt daarbij het product:

$$(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2, \text{ dus } x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$$

Natuurlijk is het handig als je  $f(x) = ax^2 + bx + c$  met behulp van kwadraat afsplitsen omzet naar de vorm waarin je de top en de symmetrieas zo kunt aflezen.

Het berekenen van de nulpunten van de functie  $f(x) = ax^2 + bx + c$  kun je ook doen met behulp van kwadraat afsplitsen.

Wiskundigen hebben dit al lang geleden gedaan en zo de **abc-formule** afgeleid. Daarmee kun je de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  oplossen en zo de nulpunten van de bijbehorende kwadratische functie berekenen.

$$\text{De gevonden oplossing is: } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De uitdrukking  $D = b^2 - 4ac$  die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking:

- bij  $D > 0$  zijn er twee oplossingen;
- bij  $D = 0$  is er één oplossing (twee dezelfde);
- bij  $D < 0$  zijn er geen reële oplossingen.

$-\frac{b}{2a}$  is de  $x$ -coördinaat van de top, omdat deze waarde precies tussen de nulpunten ligt.

In het **Practicum** kun je oefenen met het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

### Voorbeeld 1

Los op:  $x^2 + 10x = 15$ .

Antwoord

Terugrekenen kan niet, maar op  $x^2 + 10x$  kun je kwadraat afsplitsen toepassen:  $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$ .

De vergelijking wordt dan zo opgelost:

$$(x + 5)^2 - 25 = 15$$

$$(x + 5)^2 = 40$$

$$x + 5 = \pm\sqrt{40}$$

$$x = -5 \pm \sqrt{40}$$

Je kunt ook de abc-formule toepassen. Eerst schrijf je de vergelijking als:  $x^2 + 10x - 15 = 0$ . Dan neem je  $a = 1$ ,  $b = 10$  en  $c = -15$ . Discriminant:  $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 160$ . De discriminant is positief, er zijn twee oplossingen:  $x = \frac{-10 + \sqrt{160}}{2} \vee x = \frac{-10 - \sqrt{160}}{2}$ . Ga na dat beide oplossingsmethoden hetzelfde opleveren.

### Opgave 5

Los nu zelf de vergelijking  $x^2 - 12x = 30$  op.

- a Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.
- b Doe dit ook met de abc-formule.

### Opgave 6

Kwadratische vergelijkingen kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen na of ze opgelost kunnen worden met ontbinden in factoren. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

- a  $x^2 - x - 3 = 0$
- b  $-4x^2 + 5x - 12 = 0$
- c  $2x^2 - 10x + 10 = 2x - 6$
- d  $x - 5x^2 = 10$
- e  $x(x - 7) = 8$

### Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de nulpunten van de functie  $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$  en geef de coördinaten van de top van de grafiek van  $f$ .

Antwoord

$f(x) = 0$  geeft  $2x^2 - 2x - 4 = 0$ . Je hebt verschillende technieken gezien om deze vergelijking op te lossen.

Kwadraat afsplitsen:

$$2x^2 - 2x - 4 = 2\left(x^2 - x - 2\right) = 2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2}$$

De nulpunten vind je door de vergelijking  $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} = 0$  op te lossen. Ga na dat je door terugrekenen de nulpunten  $x = -1$  en  $x = 2$  vindt.

De coördinaten van de top kun je nu gemakkelijk uit het functievoorschrift aflezen:  $\left(\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}\right)$ .

Je kunt ook de vergelijking  $2x^2 - 2x - 4 = 0$  met de abc-formule oplossen, maar ontbinden in factoren is een snellere manier. Ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt. Voordeel van het kwadraat afsplitsen is dat je ook meteen de top van de grafiek uit het functievoorschrift kunt aflezen. Als je voor het bepalen van de nulpunten gaat ontbinden in factoren of gebruikmaakt van de abc-formule, dan kun je met behulp van de nulpunten of  $-\frac{b}{2a}$  de  $x$ -coördinaat van de top bepalen.

### Opgave 7

Bekijk de kwadratische functie  $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$ . Je wilt de nulpunten (in twee decimalen nauwkeurig) en de top van de grafiek van  $f$  bepalen.

- a Doe dit eerst met behulp van kwadraat afsplitsen.
- b Bepaal  $a$ ,  $b$  en  $c$ . Bereken daarna de discriminant.
- c Kun je aan de discriminant zien hoeveel oplossingen de vergelijking  $f(x) = 0$  heeft?
- d Los de vergelijking  $f(x) = 0$  met behulp van de abc-formule op en ga na dat je zo dezelfde nulpunten vindt als bij a.
- e Werk je met de abc-formule, dan kun je vanuit de nulpunten de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?

### Voorbeeld 3

#### Bekijk de applet

Een kwadratische vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant 0 is. Stel je nu voor dat je een functie hebt zoals  $f(x) = x^2 + kx + 3$ , waarin  $k$  een nog onbekende constante is. Je wilt deze constante zo kiezen, dat de grafiek van  $f$  precies met zijn top op de  $x$ -as ligt.

Welke waarde moet  $k$  dan krijgen?

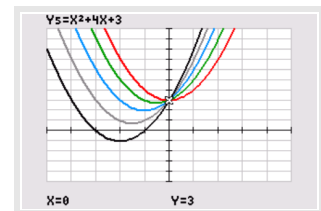
Antwoord

Je kunt met de applet werken of met de grafische rekenmachine een paar grafieken van die functies bekijken, neem bijvoorbeeld  $k = 0$ ,  $k = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k = 3$  en  $k = 4$ . Je ziet dan dat  $3 < k < 4$ .

De vergelijking  $x^2 + kx + 3 = 0$  moet precies één oplossing hebben.

Uit  $D = 0$  volgt dan:  $k^2 - 12 = 0$ .

Kennelijk moet dan gelden  $k^2 = 12$ . Dus:  $k = \pm\sqrt{12}$ .



Figuur 3

#### Opgave 8

Het voorschrift  $f(x) = x^2 + kx + 3$  voor verschillende waarden van  $k$  levert steeds een andere functie met een andere grafiek op.

- Bepaal de top van deze parabool als  $k = 2$ .
- Bepaal de top van deze parabool als  $k = 1$ .
- Schrijf functie  $f$  in de vorm  $f(x) = (x - p)^2 + q$ .
- Voor welke waarden van  $k$  ligt de top van de grafiek van  $f$  op de lijn  $y = 1$ ?

#### Opgave 9

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = px^2 - 4x + 5$ .

- Neem  $p = 1$  en bepaal de nulpunten en de top van de grafiek van  $f$ .
- Neem  $p = 0$ . Waarom is de grafiek van  $f$  nu geen parabool?
- Voor welke waarde(n) van  $p$  heeft de grafiek van  $f$  precies één punt met de  $x$ -as gemeen?

### Verwerken

#### Opgave 10

Gegeven is de kwadratische functie  $f$  met  $f(x) = x^2 + 8x - 20$ .

- Schrijf het functievoorschrift in een zodanige vorm dat je de top van de grafiek kunt aflezen.
- Je kunt nu op drie manieren de nulpunten van de grafiek van  $f$  berekenen. Doe dit eerst door het functievoorschrift dat je bij a hebt gevonden te gebruiken.
- Bereken de nulpunten ook met behulp van de abc-formule.
- Ten slotte kun je gebruikmaken van ontbinden in factoren. Bereken de nulpunten nog eens op deze manier.

#### Opgave 11

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond waar nodig af op twee decimalen.

- $x^2 - 3x - 13 = 0$
- $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$

- c  $2x^2 - 5x = x$
- d  $2x^2 - 12x = -18$
- e  $x^2 - 5x + 10 = 0$
- f  $x(x - 1) = 12$
- g  $5 - \frac{1}{3}x^2 = 1$
- h  $x - 5x^2 = 3$

### Opgave 12

Gegeven is de functie  $f(x) = x^2 + kx + 5$ , waarin  $k$  een nog onbekende constante is.

- a Voor welke waarde van  $k$  gaat de grafiek van  $f$  door het punt  $(2,7)$ ?
- b Voor welke waarde(n) van  $k$  ligt de top van de parabool op de  $y$ -as?
- c Voor welke  $k$  ligt de top van de parabool op de  $x$ -as?
- d Voor welke waarden van  $k$  ligt de top van de grafiek van  $f$  op de lijn  $y = 4$ ?

### Opgave 13

De grafiek van de kwadratische functie  $f(x) = ax^2 + bx + c$  gaat door de punten  $P(0,3)$ ,  $Q(2,7)$  en  $R(4,12)$ .

- a Van welke constante  $a$ ,  $b$ , of  $c$  weet je nu direct de waarde?
- b Stel het functievoorschrift van  $f$  op.
- c De lijn  $y = p$  snijdt de kwadratische functie in één punt. Bereken de waarde van  $p$ .

### Opgave 14

Gegeven zijn de functies  $f$  en  $g$  met  $f(x) = px^2 + 6x + 2p$  en  $g(x) = 6 - x$ .

- a Neem  $p = 2$  en bereken de nulpunten en de top van de grafiek van  $f$ .
- b Voor welke exacte waarden van  $p$  heeft de grafiek van  $f$  precies één punt met de  $x$ -as gemeen?
- c Hoe vaak snijdt de grafiek van  $f$  de  $x$ -as als  $p = 3$ ?
- d Hoe vaak snijdt de grafiek van  $f$  de  $x$ -as als  $p = 5$ ?
- e Voor welke exacte waarden van  $p$  hebben de grafieken van  $f$  en  $g$  precies één snijpunt? Rond af op twee decimalen.

## Toepassen

In de micro-economie wordt het volgende **rekenmodel voor de winst van de verkoop van een bepaald product** gehanteerd als het bedrijf de enige aanbieder is.

Het aantal verkochte producten hangt alleen af van de prijs  $p$  in euro per stuk. Hoe hoger de prijs, hoe lager de hoeveelheid  $q$  die van dit product wordt verkocht per tijdseenheid. Bijvoorbeeld kan per week gelden  $q = 400 - 2,5p$ .

De inkoopkosten hangen weer af van de prijs per eenheid en de voorraadkosten. Bijvoorbeeld kan een eenheid product € 6,= kosten en de voorraadkosten kunnen € 1500,= per week zijn.

Voor de opbrengst - als wekelijks de hele voorraad wordt verkocht - geldt  $TO = p \cdot q$ , de wekelijkse kosten noem je  $TK$  en de winst is  $TW = TO - TK$ .

### Opgave 15

Bekijk het rekenmodel voor het bepalen van de winst bij de verkoop van een bepaald product.

- a Waarom is  $TO = p \cdot q$ ?
- b Welke waarden kunnen  $p$  en  $q$  aannemen?
- c Stel een formule op voor  $TW$  als functie van de prijs  $p$ .

De winst is in dit rekenmodel een kwadratische functie van  $p$ .

- d** Bereken de maximale winst.
- e** Bij welke laagste prijs bedraagt de winst meer dan € 10.000?

### Opgave 16

In de voorgaande opgave heb je een formule opgesteld voor de winst  $TW$  afhankelijk van de prijs  $p$  per eenheid product.

- a** Stel een formule op voor  $TW$  als functie van de verkochte hoeveelheid  $q$ .
- b** Bereken de maximale winst.
- c** Bij welke hoeveelheden verkocht product wordt nog verlies geleden?

## Testen

### Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a**  $x^2 - 2x - 15 = 0$
- b**  $-x^2 - x - 1 = 0$
- c**  $20 - x^2 = 11$
- d**  $3x^2 = 6 + 5x$

### Opgave 18

Gegeven zijn de functies  $f(x) = p - x^2$  en  $g(x) = x^2 - 3x$ . Hierin is  $p$  een nog onbekende constante.

- a** Voor welke waarde(n) van  $p$  heeft functie  $f$  precies één nulpunt?
- b** Bepaal de coördinaten van de top van de grafiek van  $g$ .
- c** Neem  $p = 4$  en bereken de  $x$ -coördinaten van de snijpunten van de twee grafieken van  $f$  en  $g$  in twee decimalen nauwkeurig.
- d** Voor welke waarde van  $p$  hebben beide grafieken precies één snijpunt?

## Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het (handig) oplossen van kwadratische vergelijkingen**.

Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

**Werk met AlgebraKIT.**



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---