

4.1 Kwadratische functies

Inleiding

Je gaat nu in op de eigenschappen van functies met exponent 2, kwadraten dus. Kwadratische functies zijn functies waarvan de grafieken kunnen ontstaan door transformaties van de grafiek van $y = x^2$. De grafieken van kwadratische functies zijn parabolen. De eigenschappen van die kwadratische functies kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen en om formules bij gegeven parabolen op te stellen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de eigenschappen van een kwadratische functie afleiden uit het functievoorschrift;
- kwadratische vergelijkingen oplossen;
- een passend functievoorschrift opstellen bij een parabool die de grafiek is van een kwadratische functie.

Voorkennis

- algebraïsch vergelijkingen oplossen;
- transformaties van functies toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet al van alles van kwadratische functies.

- Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = 20$?
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?
- Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?
- Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.

Uitleg

Bekijk de applet: Kwadratische functies

Kwadratische functies zijn $f(x) = x^2$ en alle functies waarvan de grafiek door de bekende transformaties uit die van f ontstaan. Je schrijft ze in de vorm $g(x) = a(x - p)^2 + q$

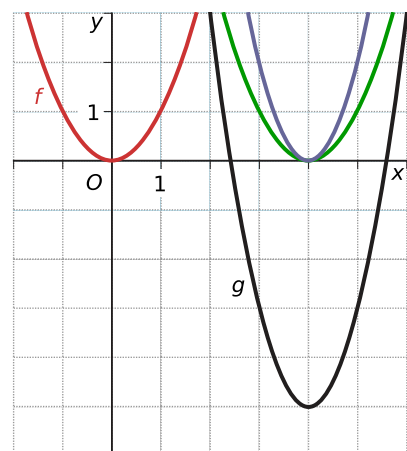
Kies bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$ dan krijg je de functie met voorschrift $g(x) = 2(x - 4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit die van f ontstaat door:

- een translatie ten opzichte van de y -as van 4;
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 2;
- een translatie ten opzichte van de x -as van -5.

De grafiek van g is een dalparabool met top $(4, -5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee nulpunten bereken je door de vergelijking $2(x - 4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.

Neem je $a = -2$, dan wordt het functievoorschrift

$h(x) = -2(x - 4)^2 - 5$. De grafiek van h is een bergparabool, omdat tekenwisseling van a een spiegeling betekent.



Figuur 2

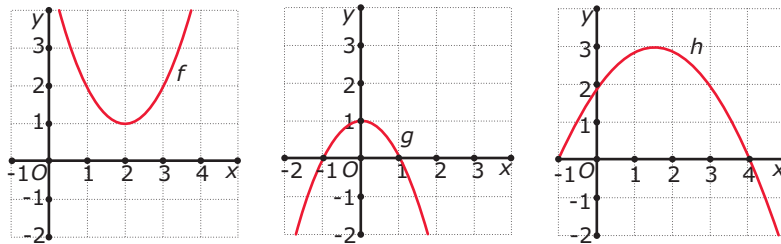
Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 4$.

- Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?
- Geef het domein en bereik van f .
- Heeft deze functie een minimum of een maximum?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de functie een minimum of een maximum heeft?

Opgave 2

Bekijk de parabolen. Geef de bijbehorende functievoorschriften.



Figuur 3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Kwadratische functies

Een functie van de vorm

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

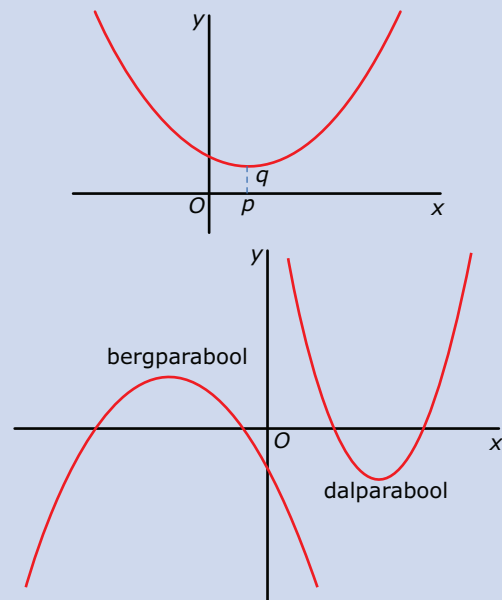
noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** (p, q) en **symmetrieas** $x = p$.

Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**.

Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.

De **kwadratische vergelijking** $a(x - p)^2 + q = u$ kun je herleiden tot: $(x - p)^2 = c$ met $c = \frac{u - q}{a}$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.



Figuur 4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$.

Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?

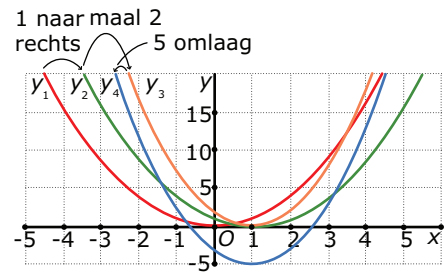
Bepaal de top en de symmetrieas van deze grafiek.

Antwoord

De grafiek wordt verkregen door op de grafiek van $y = x^2$ de volgende transformaties toe te passen:

- translatie van 1 ten opzichte van de y -as;
- vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x -as;
- translatie van -5 ten opzichte van de x -as.

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit het functievoorschrift af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.



Figuur 5

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$.

- Door welke transformaties kan de grafiek van f uit die van $y = x^2$ ontstaan?
- Geef het domein en bereik van f .
- Bepaal de uiterste waarde van f .

Opgave 4

Als je de grafiek van $y = x^2$ verschuift en ten opzichte van de x -as vermenigvuldigt, krijg je een grafiek waarvan het functievoorschrift als volgt te schrijven is: $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien of de grafiek een maximum of een minimum heeft?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien hoe groot het maximum of minimum is?
- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien welke waarde van x je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?
- Geef het domein en bereik van deze functie als $a < 0$.

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2(x - 1)^2 - 5 = 3$ exact op.

Bekijk ook de oplossingen van de volgende twee vergelijkingen:

- $2(x - 1)^2 - 5 = -8$
- $2(x - 1)^2 - 5 = -5$

Antwoord

$$2(x - 1)^2 - 5 = 3$$

$$2(x - 1)^2 = 8$$

$$(x - 1)^2 = 4$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{4}$$

$$x = 1 \pm 2$$

Je vindt $x = -1 \vee x = 3$.

Voor de tweede vergelijking krijg je $2(x - 1)^2 = -3$. Dit kan niet aangezien $2(x - 1)^2 \geq 0$.

De derde vergelijking wordt $2(x - 1)^2 = 0$ en heeft precies één oplossing, namelijk $x = 1$.

Opgave 5

Los de vergelijkingen exact op (dus rond wortels niet af).

- a $x^2 = 100$
- b $(x - 4)^2 = 64$
- c $-3(x + 1)^2 = -75$
- d $3(x + 2)^2 - 3 = 27$
- e $2x^2 - 10 = 0$

Voorbeeld 3

De snijpunten met de x -as van de grafiek van de kwadratische functie f zijn $(2,0)$ en $(4,0)$. Het snijpunt met de y -as is $(0,6)$.

Welk functievoorschrift heeft deze functie?

Antwoord

De grafiek van f is een parabool waarvan de symmetrieas een verticale lijn midden tussen de nulpunten is, dus door het punt $(3,0)$.

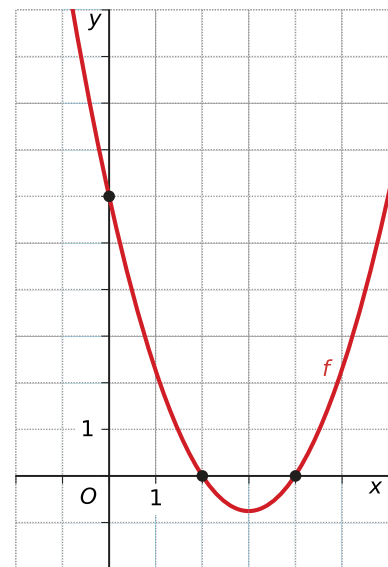
Dus is $f(x) = a(x - 3)^2 + q$.

De grafiek gaat door het punt $(0,6)$, dus $f(0) = 6$, dit geeft $9a + q = 6$.

De grafiek gaat ook door het punt $(2,0)$, dus $f(2) = 0$, dit geeft $a + q = 0$.

Uit de onderste vergelijking volgt: $q = -a$. Vul dit in de bovenste vergelijking in. Je vindt dan: $9a - a = 6$. En dus: $a = 0,75$. Omdat $q = -a$ is, geldt $q = -0,75$.

Het functievoorschrift wordt: $f(x) = 0,75(x - 3)^2 - 0,75$.



Figuur 6

Opgave 6

Stel een voorschrift op van de kwadratische functie f waarvan de grafiek de assen in de punten $(-2,0)$, $(0,2)$ en $(4,0)$ snijdt.

Verwerken

Opgave 7

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x + 8)^2 - 8$ ontstaat door transformatie van de grafiek van $y = x^2$.

- a Welke transformaties moet je dan toepassen?
- b Verander de volgorde van de laatste twee transformaties en plot de grafiek van de functie g die zo ontstaat. Waarom is de volgorde van de transformaties belangrijk?

Opgave 8

Bekijk de grafiek van $f(x) = -2(x + 4)^2 + 5$ met de grafische rekenmachine.

- a Geef het maximum, dan wel minimum van f en de waarde van x waarvoor je deze extreme waarde krijgt.
- b Los de vergelijking $-2(x + 4)^2 + 5 = -5$ op.
- c Los op: $f(x) = 5$
- d Los op: $f(x) = -11$

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ met de grafische rekenmachine.

- a Los algebraïsch op: $2(x - 1)^2 - 3 = 0$. Rond af op twee decimalen.
- b Teken de grafiek van f door elke transformatie vanuit $y = x^2$ te tekenen.

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = -3(x + 2)^2 + 10$.

- a Voor welke waarden van x is deze functie dalend?
- b Is de functie op de rest van het domein dus stijgend?
- c Bereken algebraïsch de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.

Opgave 11

De grafiek van een kwadratische functie gaat door de punten (1,9) en (5,5) en heeft als symmetrieas de lijn $x = 2$.

- a Is de grafiek van deze kwadratische functie een berg- of een dalparabool?
- b Stel het functievoorschrift op bij de grafiek.

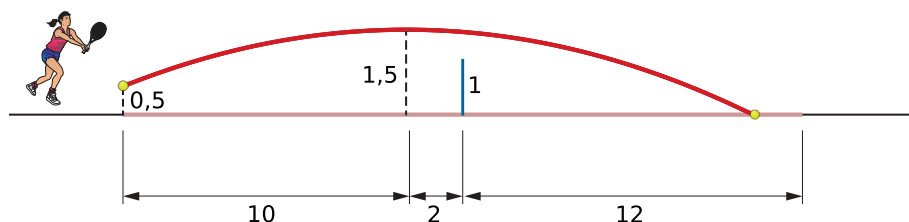
Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + p$. Hierin is p een nog onbekende constante.

- a Welke extreme waarde heeft functie f ?
- b Voor welke waarden van p heeft de functie f twee nulpunten?
- c Voor welke waarde van p gaat de grafiek van f door het punt (5,8)?
- d Voor welke waarden van p heeft de functie f geen snijpunten met de lijn $y = 4$?
- e Voor welke waarden van p ligt de top van de grafiek van f op de lijn $y = 4x - 5$?

Toepassen

Bekijk de applet: [Baan van een tennisbal.](#)



Figuur 7

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) **parabolische baan** ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, dat ongeveer 24 meter bedraagt.

Je kunt door berekening aantonen dat de bal 'in' is.

Breng daartoe een geschikt assenstelsel aan zoals dat in de figuur is te zien en stel een bijpassende kwadratische formule op voor de baan van de bal.

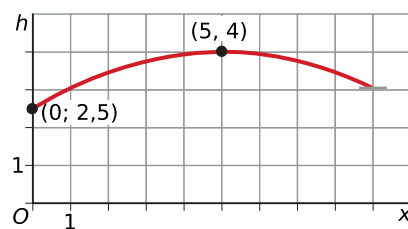
Opgave 13

De baan van een tennisbal kan worden beschreven met een kwadratische functie.

- De baan is slechts ongeveer parabolisch. Waarom is hij in de praktijk zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?
- Omdat de parabool door het punt $(1; 1,5)$ gaat, kun je de baan beschrijven met de formule $h(x) = a(x - 10)^2 + 1,5$. Licht dit toe.
- Laat zien dat $a = -0,01$.
- Bereken nu de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal (ongeveer) beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad 'in' is.

Opgave 14

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie de figuur. Het hoogste punt van de baan is gegeven. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.



Figuur 8

- Stel een formule op voor de functie $h(x)$ die de baan van de bal beschrijft.
- De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond. Hoe ver staat de speler van (het midden van) de ring van de basket in cm nauwkeurig?

Testen

Opgave 15

Bepaal bij de volgende functies de coördinaten van de top van de grafiek. Heeft de functie een maximum of een minimum?

- a** $f(x) = -2x^2 - 2$
- b** $g(x) = 100(x - 4)^2 + 8$
- c** $h(x) = -(x + 9)^2$

Opgave 16

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

- a** $3(x - 5)^2 - 5 = -2$
- b** $3(x - 5)^2 - 5 = -5$
- c** $-2(x + 4)^2 + 3 = 1$

Opgave 17

De nulpunten van de kwadratische functie f zijn $x = 10$ en $x = 20$. De grafiek van f snijdt de y -as in het punt $(0,30)$. Stel het functievoorschrift van f op.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
