3.4 Lineaire modellen

Inleiding

Het komt regelmatig voor dat onderzoekers op grond van de gevonden resultaten een lineair verband tussen twee variabelen veronderstellen. Dat is bijvoorbeeld het geval als de meetpunten bij een verband tussen twee variabelen (vrijwel) op een rechte lijn liggen. De kunst is dan om op grond van de meetgegevens een goede lineaire functie als model op te stellen. Hoe dat in zijn werk gaat wordt in dit onderdeel besproken.

Je leert in dit onderwerp

- bij een lineair verband dat is gegeven door een aantal (meet)punten een passende formule opstellen.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij (lineaire) functies;
- werken met lineaire verbanden en de bijbehorende hellingsgetallen (richtingscoëfficiënten).

Verkennen

Opgave V1

Nadat een kaars van 30 cm lang is aangestoken heeft iemand om de twee uur de lengte gemeten. De resultaten zie je in de tabel.

tijd (in uren)	0	2	4	6	8	10
lengte (in cm)	30	27,2	24,1	20,9	17,9	14,6

Tabel 1

a Maak bij deze tabel een puntengrafiek.

b Je kunt een rechte lijn trekken die het verloop van de lengte van de kaars weergeeft. Doe dat en probeer met behulp daarvan te voorspellen na hoeveel uur de kaars is opgebrand.

Uitleg

De bevolking van een grote stad is de laatste jaren gestaag gegroeid. In de tabel vind je enkele gegevens:

jaartal	1960	1970	1980	1990	2000	2010
aantal inwoners (×100000)	2,1	3,8	5,3	6,6	8,3	9,8

Tabel 2

Als je bij de tabel van de bevolking van deze stad een grafiek tekent, lijken de meetpunten ongeveer op een rechte lijn te liggen. Hoewel de groei niet precies lineair is, kun je hem goed benaderen door een lineair model. Je tekent dan een rechte lijn die zo goed mogelijk door de meetpunten gaat. Kies eerst een paar variabelen: N is het aantal inwoners (×100000) en t is de tijd in jaren vanaf 1960, dus $t = 0$ in 1960.

Een lijn die goed het verloop van de meetpunten beschrijft gaat door de punten (20; 5,3) en (50; 9,8). Ga dat zelf na door de punten te tekenen. Om een formule bij deze lijn op te stellen, zoek je eerst het hellingsgetal. In $50 - 20 = 30$ jaar tijd neemt N toe met $9,8 - 5,3 = 4,5$.

Per jaar is dat een toename van $\frac{4{,}5}{30} = 0{,}15$.

Dit is het hellingsgetal van de rechte lijn. De bijbehorende formule is dus $N = 0{,}15 \cdot t + b$. Om b te bepalen, gebruik je het feit dat de grafiek door $(20; 5{,}3)$ gaat, dus: $5{,}3 = 0{,}15 \cdot 20 + b$.
Dit betekent dat $b = 2{,}3$. Het lineaire model heeft daarom als formule $N = 0{,}15 \cdot t + 2{,}3$.

Hiermee kun je voorspellen hoe groot het aantal inwoners in 2020 en 2030 zal zijn.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het lineaire model dat wordt opgesteld voor de bevolking van deze stad.

a Ga na dat er door de meetpunten inderdaad ongeveer een rechte lijn bestaat die door de punten $(20; 5{,}3)$ en $(50; 9{,}8)$ gaat.

b Controleer of de gevonden formule bij de overige meetpunten ongeveer de juiste waarden oplevert.

c Voorspel het aantal inwoners van deze stad in 2020 en 2030.

Opgave 2

Een cilindervormige kaars is anderhalf uur na het aansteken 25 cm lang en vier uur na het aansteken nog 20 cm lang. Voor deze kaars kun je aannemen dat de lengte L (in centimeter) afhangt van de brandtijd t (in uren).

a Bereken het hellingsgetal van die lineaire functie. Welke betekenis heeft dit getal in de praktijk?

b Stel het functievoorschrift $L(t)$ op.

c Bereken met behulp van dat functievoorschrift na hoeveel uur deze kaars volledig is opgebrand.

Theorie en voorbeelden

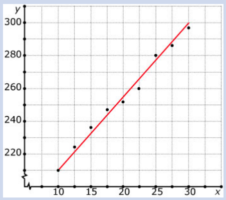
Om te onthouden

Soms wordt het verband tussen y en x gegeven door een tabel met meetpunten. Liggen die meetpunten (ongeveer) op een rechte lijn, dan kun je hierbij een **lineair model** opstellen. En daarbij hoort een **lineaire functie** van de vorm $y = ax + b$.

Gaat de rechte lijn door de punten (x_A, y_A) en (x_B, y_B), dan bepaal je als volgt de lineaire formule:

- x neemt toe met $x_B - x_A$;
- y neemt toe met $y_B - y_A$;
- als x met 1 toeneemt, neemt y met $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ toe;
  dit is het hellingsgetal (de richtingscoëfficiënt) r van de lijn;
- de gevraagde formule is $y = rx + b$;
- (x_A, y_A) moet op de lijn liggen, dus $y_A = r \cdot x_A + b$, waarmee je b kunt berekenen.

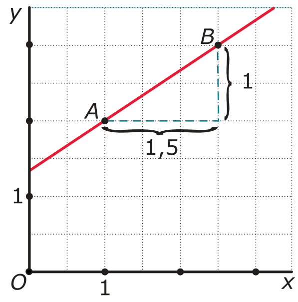
De formule van de rechte lijn kun je nu opstellen.



Figuur 1

Voorbeeld 1

Bekijk de applet



Figuur 2

Je ziet in een assenstelsel de twee punten A en B getekend. Stel een formule op voor de lijn die door de punten A en B gaat.

Antwoord

Lees af: $A(1,2)$ en $B(2{,}5;3)$. De gevraagde formule heeft de vorm $y = ax + b$.
Zo bereken je a en b:

- $a = \frac{3-2}{2{,}5-1} = \frac{2}{3}$;
- de formule wordt dan $y = \frac{2}{3}x + b$;
- $A(1,2)$ invullen geeft: $2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$ en dus $b = 1\frac{1}{3}$.
  Als je het punt $B(2{,}5;3)$ invult, moet je dezelfde waarde voor b krijgen.

De gevraagde formule is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

Opgave 3

Bekijk eerst **Voorbeeld 1**.

a Lijn l gaat door de punten $(-3,2)$ en $(17,10)$. Stel de vergelijking van lijn l op.

b Lijn m gaat door de punten $(5,20)$ en $(10,-25)$. Stel de vergelijking van lijn m op.

c Gegeven is dat f een lineaire functie is en dat $f(6) = 8$ en $f(10) = 14$. Stel het functievoorschrift op van f.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

Je kunt een formule voor de lijn die door de punten $A(1,2)$ en $B(2{,}5;3)$ gaat ook opstellen door beide punten in de vergelijking $y = ax + b$ in te vullen:

- $A(1,2)$ geeft: $2 = a + b$.
- $B(2{,}5;3)$ geeft: $3 = 2{,}5a + b$.

Trek je beide vergelijkingen van elkaar af, dan vind je: $1 = 1{,}5a$. Dus $a = \frac{2}{3}$. En (na invullen): $b = \frac{4}{3}$.

De vergelijking van de lijn is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** tref je een andere manier aan om de vergelijking van een lijn door twee gegeven punten op te stellen. Lijn l gaat door de punten $(-4,2)$ en $(20,10)$.

Stel een vergelijking van l op door deze methode toe te passen.

Opgave 5

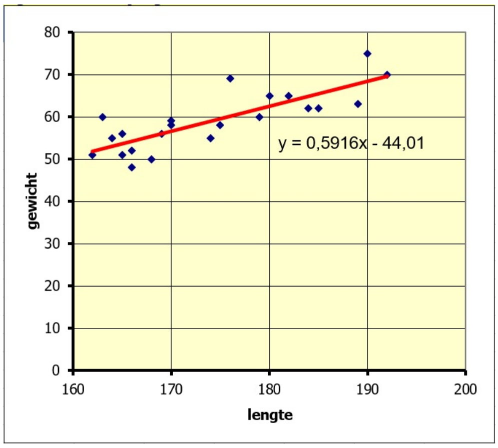
Dit zijn twee bijzondere situaties.

a Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten $(2,1)$ en $(12,1)$ gaat.

b Stel een vergelijking op van de lijn die door de punten $(2,1)$ en $(2,10)$ gaat.

Voorbeeld 3

Van 22 scholieren in een 4 havo klas zijn lengte en gewicht gemeten en in Excel ingevoerd. Excel kan daar een zogenaamde trendlijn doorheen tekenen. Deze trendlijn geeft dan een verband tussen lengte L (in centimeter) en gewicht G (in kilogram). Er is gekozen voor een lineair verband. Stel daarbij een passende formule op.



Figuur 3

Antwoord

De formule krijgt de vorm: $G = a \cdot L + b$. De lijn gaat ongeveer door (160,50) en (190,67).

- $a = \frac{67-50}{190-160} \approx 0{,}57$;
- de formule wordt dan $G = 0{,}57L + b$;
- punt (160,50) invullen geeft $50 = 0{,}57 \cdot 160 + b$, dus $b \approx -41{,}2$.

De gevraagde formule is $G = 0{,}57L - 41{,}2$.

Je ziet dat deze formule iets afwijkt van de formule die Excel geeft. Dat komt door de onnauwkeurigheid van het aflezen van de punten waar de lijn doorheen gaat. Excel berekent de trendlijn nauwkeuriger.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je hoe bij een verzameling meetpunten een lineair model wordt opgesteld door een zo goed mogelijk passende lijn te trekken en twee punten op die lijn af te lezen uit de figuur.

a Stel dat je afleest dat de rechte lijn door de punten (170,56) en (195,70) gaat. Welke formule past er dan bij de lijn?

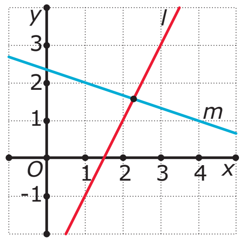
b Bepaal met de formule die je bij a hebt gevonden hoe zwaar een scholier van 1,60 meter uit deze groep zou moeten zijn.

Opgave 7

Je ziet twee lijnen l en m.

a Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op.

b Bereken vervolgens exact het snijpunt van beide lijnen.

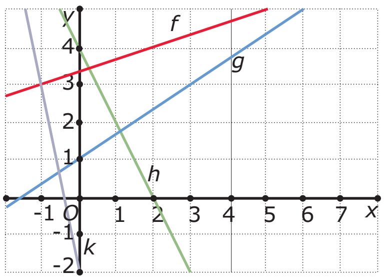


Figuur 4

Verwerken

Opgave 8

In dit assenstelsel staan vier grafieken van lineaire functies.



Figuur 5

Stel bij elk van deze functies het functievoorschrift op.

Opgave 9

Stel een vergelijking op van de rechte lijn l bij de volgende situaties.

a l gaat door de punten (30,68) en (34,56).

b l gaat door de punten (-2,100) en (-3,100).

c l heeft richtingscoëfficiënt 0,5 en gaat door (-2,4).

d l is de x-as.

e l is de y-as.

Opgave 10

In een hogedrukpan neemt tijdens het koken de druk in de pan toe. Daardoor wordt de kooktemperatuur hoger, zodat het eten sneller gaar is. In de tabel vind je enige meetgegevens.

druk p (in atmosfeer)	1	1,23	1,51	1,7	1,94
temperatuur T (in °C)	100	105	110	115	120

Tabel 3

Als je deze meetgegevens als punten in een assenstelsel tekent, dan kun je daar (bij benadering) een rechte lijn door tekenen. Neem T op de verticale as, dan gaat de lijn door het punt (1,100). Bij de tabel past dan een lineair verband van de vorm $T = a \cdot p + b$. De rechte lijn gaat ook langs bijvoorbeeld het punt (1,70; 115). Met behulp van deze punten vind je dan een geschikt lineair model: $T = 21{,}43p + 78{,}57$.

a Stel zelf de gegeven formule voor $T(p)$ op. Welke eenheden worden er gebruikt?

b Bij welke temperatuur zou de druk 2 atmosfeer worden?

c Bij welke druk kun je een temperatuur van 150 °C bereiken?

Opgave 11

Lijn l gaat door de punten $P(13,8)$ en $Q(43,68)$ en lijn m gaat door de punten $R(23,38)$ en $T(43,28)$. Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijnen l en m.

Opgave 12

Voor gassen geldt de wet van Gay-Lussac. Het volume V (in m^3) van een bepaalde hoeveelheid gas bij een bepaalde druk hangt af van de temperatuur T (in °C). Er geldt: $\frac{V(T)}{T+273} = \frac{V(0)}{273}$ waarin -273 °C het absolute nulpunt is en $V(0)$ het volume bij 0 °C is.

a Herleid deze formule tot $V(T) = V(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{273}T\right)$.

b Leg uit dat er sprake is van een lineair model. Welke aanname moet je doen, wil dat model geldig zijn? Welk domein moet je kiezen?

c Neem $V(0) = 1\ \text{m}^3$ en breng de bijbehorende grafiek in beeld. Schrijf de geschikte vensterinstellingen op.

d Welk volume heeft dit gas bij kamertemperatuur (20 °C)?

e Bij welke temperatuur is het volume 1,5 keer zo groot geworden ten opzichte van $V(0) = 1$?

Toepassen

Opgave 13: Eenparige beweging

Bij een eenparige beweging beweegt een voorwerp met een constante snelheid langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven met de formule: $s(t) = s(0) + v \cdot t$ waarin $s(t)$ de afgelegde weg (in meters) na t seconden is.

a Wat stelt $s(0)$ voor?

b Wat stelt v voor?

c Neem $s(0) = 0$ en $v = 20$ voor een bepaald voorwerp. Breng de bijbehorende grafiek van $s(t)$ in beeld.

d Een tweede voorwerp heeft 400 meter voorsprong en beweegt langs dezelfde baan met een snelheid van 15 m/s. Geef de formule die bij de beweging van dit voorwerp past en breng de bijbehorende grafiek in beeld.

e Bereken op welk tijdstip het eerste voorwerp het tweede heeft ingehaald.

Opgave 14: Eenparig versnelde beweging

Bij een eenparig versnelde beweging beweegt een voorwerp met een constante versnelling a (in m/s^2) langs een rechte baan. In de natuurkunde wordt dat aangegeven door: $v(t) = v(0) + a \cdot t$ waarin $v(t)$ de snelheid (in m/s) na t seconden is.

a Wat stelt $v(0)$ voor?

b Albert weet op twee momenten de snelheid van een voorwerp. Hij weet namelijk dat het voorwerp vertrekt met een beginsnelheid van 40 m/s en dat het voorwerp na 3,5 seconden een snelheid van 75 m/s heeft. Stel eerst de formule $v(t)$ voor dit voorwerp op en bereken dan na hoeveel seconden het voorwerp met een snelheid van 350 m/s beweegt.

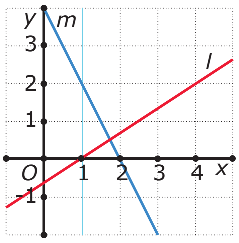
c Om een voorwerp met een massa m van 1000 kg dat met een constante snelheid van 40 m/s beweegt tot stilstand te brengen, wordt een bepaalde remkracht F (in newton) uitgeoefend. Het voorwerp moet binnen acht seconden tot stilstand komen. Er geldt $F = m \cdot a$ met F in newton, m in kg en a (de versnelling) in m/s^2. Bereken de grootte van de remkracht F.

Testen

Opgave 15

In deze figuur staan twee lijnen l en m.

Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op. Bereken vervolgens algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 6

Opgave 16

Stel een vergelijking op van de rechte lijnen die als volgt beschreven worden.

a De lijn gaat door de punten (40,32) en (34,56).

b De lijn heeft richtingscoëfficiënt -2 en gaat door het punt (-2,4).

c De lijn gaat door het punt (3,2) en is evenwijdig aan de y-as.

Opgave 17

De uitzetting van een metalen staaf verloopt lineair met de temperatuur T als deze gelijkmatig wordt verhit. In de natuurkunde wordt daarvoor de formule: $l(T) = l(0) \cdot (1 + \alpha \cdot T)$ gebruikt, waarin $l(T)$ de lengte (in m) van de staaf na het verhitten tot T °C is. De constante α heet de lineaire uitzettings-coëfficiënt.

a Wat stelt $l(0)$ voor?

b Voor ijzer geldt: $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}$. Ga uit van een ijzeren staaf met $l(0) = 0{,}5$ m. Hoe lang is deze staaf op kamertemperatuur (20 °C)? En tot hoeveel graden Celsius moet je hem verhitten om de staaf 1 mm langer dan $l(0)$ te laten worden?

c Voor koper geldt: $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$. Een staaf koper van 50 cm bij 20 °C wordt verhit tot 100 °C. Bereken de lengte van deze staaf bij 100 °C.

Practicum

Ook de grafische rekenmachine kan een formule opstellen bij een lijn door een puntenwolk.
Met deze practica leer je hoe je de **de trendlijn** met de grafische rekenmachine tekent en berekent.

- **Trendlijn, correlatie en de TI84**
- **Trendlijn, correlatie en de TInspire**
- **Trendlijn, correlatie en de Casio**
- **Trendlijn, correlatie en de HPprime**
- **Trendlijn, correlatie en de NumWorks**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.