

3.3 Stelsels vergelijkingen

Inleiding

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen. Over het oplossen van dergelijke stelsels van vergelijkingen gaat dit onderdeel.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van substitutie;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode;
- stelsel van vergelijkingen oplossen met behulp van de grafische rekenmachine;
- opstellen van een stelsel van vergelijkingen.

Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen.

Bereken algebraïsch hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Uitleg

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kost € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kost € 4,50. In totaal zijn de inkomsten door kaartverkoop € 1110,00. Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Dit probleem kun je aanpakken door bijvoorbeeld twee variabelen in te voeren:

- het aantal kinderen in de zaal is x ;
- het aantal volwassenen in de zaal is y .

Natuurlijk kun je ook letters als k en v nemen, maar het voordeel van deze keuze is dat je meteen weet wat je op de x -as en wat je op de y -as uitzet. Er zijn twee gegevens:

- het totaal aantal bezoekers is 300, dus $x + y = 300$
- de totale inkomsten zijn 1110 euro, dus $2,5x + 4,5y = 1110$

Je hebt nu een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Dit stelsel wil je oplossen, dat wil zeggen een combinatie van waarden voor x en y zoeken die aan beide vergelijkingen tegelijk voldoen.



Figuur 2

Zo'n stelsel van vergelijkingen wordt vaak als volgt genoteerd:

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

In de voorbeelden leer je verschillende methoden om zo'n stelsel op te lossen.

Opgave 1

Bekijk het stelsel van vergelijkingen in de [Uitleg](#).

- Schrijf beide vergelijkingen in een zodanige vorm dat ze in de grafische rekenmachine kunnen worden ingevoerd.
- Kies geschikte vensterinstellingen en bepaal het snijpunt van beide grafieken.
- Hoeveel kinderen zaten er in de zaal?
- Je kunt dit ook algebraïsch oplossen. Laat zien, hoe.
Je kunt $2,5x + 4,5y = 1110$ nog handiger combineren met $x + y = 300$.
Schrijf $x + y = 300$ als $y = 300 - x$ en vul dit in $2,5x + 4,5y = 1110$ in.
- Hoe kun je nu x vinden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je in feite naar de snijpunten van twee bijpassende grafieken. Die snijpunten kun je in veel gevallen vinden door:

- beide vergelijkingen met elkaar te **combineren** en er zo één vergelijking met één onbekende van te maken;
- beide vergelijkingen zo te herleiden dat je ze in de grafische rekenmachine kunt invoeren en dan de gevraagde snijpunten door de machine te laten berekenen.

Bij het combineren van beide vergelijkingen maak je gebruik van:

- substitutie**: je drukt bij een van beide vergelijkingen de ene variabele in de andere uit en je vervangt dan in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking; zie [Voorbeeld 1](#).
- de **balansmethode**: je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar. Je zorgt er wel eerst voor dat dan een van beide variabelen wegvalt (door een slimme vermenigvuldiging toe te passen); zie [Voorbeeld 2](#).

Voorbeeld 1

Los dit stelsel met behulp van substitutie op.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Antwoord

De vergelijking $x + y = 300$ kun je schrijven als $y = 300 - x$. In de andere vergelijking kun je nu y vervangen door $300 - x$. Dat heet substitutie. Je krijgt dan: $2,5x + 4,5(300 - x) = 1110$.

Deze vergelijking heeft alleen x als onbekende. Het stelsel is dus op te lossen: $x = 120$. Er zaten dus 120 kinderen in de zaal.

Opgave 2

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

- Druk in de eerste vergelijking y uit in x .
- Vul de gevonden uitdrukking voor y in de tweede vergelijking in. Welke vergelijking in x ontstaat nu?
- Los de vergelijking die je bij b hebt gevonden op.
- Bepaal bij de gevonden waarde voor x de bijbehorende waarde voor y . Schrijf je oplossing nu volledig op en laat zien hoe je die kunt controleren.
- Je kunt dit stelsel van vergelijkingen ook oplossen door x uit te drukken in y . Los ook op die manier het stelsel op.

Voorbeeld 2

Je kunt een stelsel van vergelijkingen ook met de balansmethode oplossen.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Vermenigvuldig in de bovenste vergelijking beide zijden met 2,5, dan krijg je:

$$\begin{cases} 2,5x + 2,5y = 750 \\ 2,5x + 4,5y = 1110 \end{cases}$$

Als je van de bovenste vergelijking links van het isgelijktteken de linkerzijde van de onderste vergelijking en rechts van het isgelijktteken de rechterzijde van de bovenste vergelijking aftrekt, dan krijg je $2y = 360$.

Dit geeft $y = 180$. Er zaten daarom $300 - 180 = 120$ kinderen in de zaal.

Opgave 3

In [Voorbeeld 2](#) zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken).

- Voer zelf de in het voorbeeld beschreven oplossingsmethode uit.
- Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 4,5 te vermenigvuldigen. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.
- Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door in de bovenste vergelijking beide zijden met 5 te vermenigvuldigen en in de onderste vergelijking beide zijden met -2. Laat zien hoe je dan de oplossing vindt.

Opgave 4

Los de stelsels van vergelijkingen op eenzelfde manier als in het voorbeeld op.

$$\text{a} \quad \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$\text{b} \quad \begin{cases} 2x - 2y = 5 \\ 6x + 8y = 1 \end{cases}$$

Voorbeeld 3

Welke afmetingen heeft een rechthoekig veld met een oppervlakte van 120 m^2 en een omtrek van 46 meter?

Antwoord

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b . Een oppervlakte van 120 m^2 betekent $l \cdot b = 120$. Een omtrek van 46 meter betekent $2l + 2b = 46$.

Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is alleen algebraïsch op te lossen door middel van substitutie. Schrijf $2l + 2b = 46$ als $l = 23 - b$ en vervang in de andere vergelijking l door deze uitdrukking. Je krijgt: $(23 - b) \cdot b = 120$.

De vergelijking $(23 - b) \cdot b = 120$ schrijf je als $b^2 - 23b + 120 = 0$. Door ontbinden in factoren vind je $b = 8 \vee b = 15$.

Het grasveld is 15 bij 8 meter.

Opgave 5

Bekijk [Voorbeeld 3](#).

- Waarom kun je dit stelsel van vergelijkingen niet oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken)?
- Laat zien hoe je dit stelsel kunt oplossen met behulp van de grafische rekenmachine.

Opgave 6

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen:
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$

- Probeer dit stelsel van vergelijkingen op te lossen.
- Welk probleem doet zich voor?
- Leg uit waarom dit stelsel van vergelijkingen geen oplossingen heeft.

Verwerken

Opgave 7

Los de stelsels van vergelijkingen op.

- $$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 2x + 4y = -7 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 4x + 6y = 22 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x \cdot y = 84 \\ 2x + y = 29 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$$

Opgave 8

Van een rechthoek is de oppervlakte 200 cm^2 en de omtrek 90 cm . Noem de lengte l en de breedte b , beide in centimeter.

Stel twee vergelijkingen op waaraan l en b moeten voldoen. Bereken algebraïsch de oplossing van dit stelsel.

Opgave 9

Een verhandelaar heeft een mengmachine van € 300,00 aangeschaft. Het mengen van verf kost hem naast deze vaste kosten nog € 6,00 per liter.

- Geef een formule voor de kosten K als functie van het aantal liter verf q dat hij verkoopt.
- Welke waarden kan q aannemen? Welke waarden kan K aannemen?
- Hij verkoopt zijn gemengde verf voor € 8,25 per liter. Zijn opbrengst R is ook een functie van q . Geef een bijpassende formule.
- Breng beide functies in beeld op de grafische rekenmachine. Bereken het snijpunt van beide grafieken. Welke betekenis heeft dit snijpunt voor de verhandelaar?

Opgave 10

Op een kaasboerderij wordt van 9,8 kg melk 1 kg volvette kaas gemaakt. 22,5 kg melk verwerkt men daar tot 1 kg boter. Er is 1000 kg melk in voorraad. Er wordt altijd twee keer zoveel boter als kaas gemaakt.

Hoeveel kg kaas en hoeveel kg boter kan er van de beschikbare hoeveelheid melk worden gemaakt? Los dit probleem op met behulp van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Opgave 11

Voor een heg koopt een tuinman jonge groenblijvende planten: twintig thuja's en twaalf jeneverbessen. Dat kost hem € 267,00. Na het planten blijven er twee jeneverbessen over, maar komen er vijf thuja's tekort. Bij het tuincentrum ruilen ze de twee jeneverbessen voor vijf thuja's, maar er moet € 18,00 worden bijbetaald.

Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Toepassen

Behalve een stelsel van (lineaire) twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je nu ook een **stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden** oplossen.

Meestal pas je dan op een handige manier de balansmethode toe.

Eerst kies je twee vergelijkingen uit die je door combineren kunt terugbrengen tot één vergelijking met twee onbekenden.

Dit doe je vervolgens nog een keer met één van die vergelijkingen en de derde vergelijking.

Zorg er wel voor dat je in beide gevallen dezelfde onbekende 'wegwerkt'.

Je hebt dan een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden over en daar weet je wel raad mee...

Opgave 12

Los het stelsel van drie vergelijkingen met drie variabelen op.

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 24 \\ -x + 3y + 2z = -47 \end{cases}$$

Testen

Opgave 13

Los de volgende stelsels van vergelijkingen op.

a
$$\begin{cases} k + 3v = 200 \\ k + v = 110 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 3a + 4b = 10 \\ a - 2b = 4 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} p \cdot q = 400 \\ q = 200 - 0,5p \end{cases}$$

Opgave 14

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: ‘zaal’ en ‘balkon’. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 82 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 1080,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats en hoeveel een zaalplaats?

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van stelsels vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
