

3.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Lineaire functies zijn voorbeelden van veel algemenere lineaire verbanden met twee variabelen. Een eenvoudig voorbeeld is het verband tussen lengte l en breedte b als de omtrek van een rechthoek is gegeven. Maar er zijn meer situaties te bedenken waarin tussen twee variabelen een lineair verband bestaat.

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een in woorden beschreven lineair verband een passende formule opstellen;
- grafieken tekenen bij lineaire verbanden in het algemeen;
- lineaire formules herleiden naar lineaire functies.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij lineaire functies;
- werken met lineaire functies.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

De omtrek van rechthoek $OAPB$ is 30.

Noem de lengte van deze rechthoek l en de breedte b .

- Welke formule geldt voor het verband tussen l en b ?
- Waarom is de bijbehorende grafiek in een l, b -assenstelsel een rechte lijn?

Uitleg

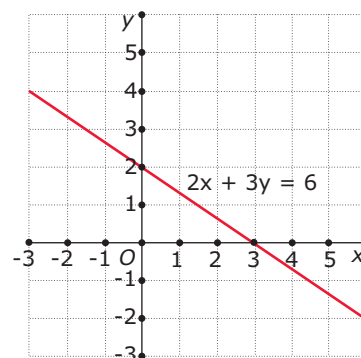
Bekijk de applet

Een formule als $2x + 3y = 6$ is een lineaire vergelijking met twee variabelen. De grafiek bij zo'n lineaire vergelijking is een rechte lijn. Je kunt de formule herleiden tot de vorm $y = ax + b$. In deze vorm is y uitgedrukt als een functie van x :

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 6 \\3y &= -2x + 6 \\y &= -\frac{2}{3}x + 2\end{aligned}$$

Op de rechte lijn liggen alle punten (x, y) die voldoen aan $2x + 3y = 6$ en ook aan $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Om die rechte lijn te tekenen, is het niet nodig om de formule te herschrijven. Je kunt ook enkele punten van de lijn bepalen:

- Als $x = 0$, dan is $3y = 6$ en dus $y = 2$.
Het punt $(0, 2)$ ligt op de lijn.



Figuur 1

- Als $x = 1$, dan is $2 + 3y = 6$ en dus $y = 1\frac{1}{3}$.

Het punt $(1, 1\frac{1}{3})$ ligt op de lijn.

- Als $y = 0$, dan is $2x = 6$ en dus $x = 3$.

Het punt $(3, 0)$ ligt op de lijn.

Omdat de grafiek bij een lineaire vergelijking een rechte lijn is, heb je genoeg aan twee punten om de grafiek te tekenen. Vaak neem je daarvoor de punten met $x = 0$ of $y = 0$.

Opgave 1

Gegeven is de lineaire vergelijking $3x - 4y = 12$.

- Teken de lijn die bij deze lineaire vergelijking hoort door eerst de snijpunten met de beide assen te berekenen.
- Herleid de vergelijking tot de vorm $y = \dots$

Opgave 2

Gegeven zijn de lineaire vergelijkingen $-2x + y = 2$ en $5x + 2y = 13$.

- Plot de grafieken bij de formules in één assenstelsel.
- Bepaal het snijpunt van beide grafieken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ beschrijft een **lineair verband tussen twee variabelen**. De grafiek ervan is een rechte lijn.

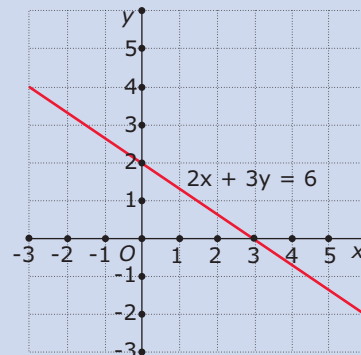
Je kunt die grafiek tekenen door twee punten van deze lijn te bepalen. Vaak doe je dat door $x = 0$ te kiezen en de bijbehorende waarde voor y uit te rekenen en door $y = 0$ te kiezen en de bijbehorende waarde voor x uit te rekenen.

Lineaire vergelijkingen met twee variabelen zoals $ax + by = c$ kun je herleiden naar een lineaire functie als $b \neq 0$. Zo is $2x + 3y = 6$ te schrijven als

$y = -\frac{2}{3}x + 2$. En dit is een lineaire functie met begingetal 2 en hellingsgetal $-\frac{2}{3}$.

Bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $by = c$ en is te herleiden tot $y = \frac{c}{b}$. Dit is een lineaire functie met hellingsgetal 0.
- $b = 0$: de vergelijking heeft dan de vorm $ax = c$ en is te herleiden tot $x = \frac{c}{a}$. Dit is geen lineaire functie; er is geen hellingsgetal. De grafiek is een verticale lijn evenwijdig aan de y -as.



Figuur 2

Voorbeeld 1

Een museum trok op een zaterdag veel bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 1,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 2,50. In totaal is er voor € 1245,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Hoeveel kinderen en hoeveel volwassenen hebben het museum bezocht?

Antwoord

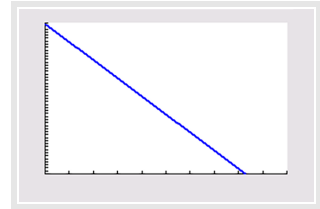
Er zijn meerdere combinaties mogelijk. Bijvoorbeeld 50 kinderen en 468 volwassenen of 150 kinderen en 408 volwassenen. Met de grafische rekenmachine kun je gemakkelijk alle oplossingen bepalen.

Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y , dan geldt:

$1,50x + 2,50y = 1245$. Dit is een lineair verband tussen x en y . Je kunt de

formule herleiden tot: $y = \frac{1245 - 1,50x}{2,50}$. Maak je nu met de grafische reken-

machine een grafiek, dan kun je gemakkelijk alle mogelijke combinaties van x en y zien. Je kunt dan de volgende waarden vrij snel vinden: $x = 0$ en $y = 498$, $x = 5$ en $y = 495$ en $x = 830$ en $y = 0$. Deze waarden kun je ook in de tabel van de grafische rekenmachine vinden.



Figuur 3

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je ziet een lineair verband tussen de variabelen x en y gegeven door $1,50x + 2,50y = 1245$.

- Laat zien dat je deze formule kunt herleiden tot $y = -0,6x + 498$.
- Kunnen er 300 kinderen bij de voorstelling aanwezig zijn geweest? Licht je antwoord toe.

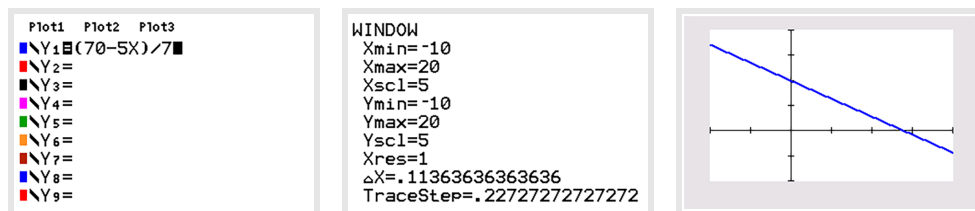
Voorbeeld 2

Gegeven is de lineaire formule $2,5x + 3,5y = 35$. Maak een grafiek bij het verband tussen beide variabelen.

Antwoord

De lineaire vergelijking $2,5x + 3,5y = 35$ kun je ook schrijven als $5x + 7y = 70$. Er zijn meerdere manieren om hierbij een grafiek te tekenen:

- Omdat bij een lineair verband de grafiek een rechte lijn is, heb je aan twee punten (x, y) die aan de vergelijking voldoen genoeg. Je vindt die snel door eerst $x = 0$ en vervolgens $y = 0$ te kiezen: $(0, 10)$ en $(14, 0)$.
- Je herleidt de vergelijking tot: $y = \frac{70 - 5x}{7}$ en gebruikt de grafische rekenmachine om de grafiek te tekenen. Het wordt een rechte lijn die door het punt $(0, 10)$ gaat en richtingscoëfficiënt $-\frac{5}{7}$ heeft.



Figuur 4

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een grafiek maakt bij de vergelijking $2,5x + 3,5y = 35$.

- Waarom kun je in dit geval de grafiek het beste tekenen door eerst de snijpunten met de assen te berekenen?
- Maak zelf de grafiek op de grafische rekenmachine.

- c Welke waarde van x hoort bij $y = -20$?

Opgave 5

Je ziet vier keer de vergelijking van een lijn. Om die lijn te tekenen kun je eerst de snijpunten met de assen berekenen en dan een rechte lijn door die twee snijpunten trekken.

Je kunt ook de vergelijking eerst herleiden tot een lineaire functie en dan het begingetal en de richtingscoëfficiënt gebruiken voor het tekenen van de lijn.

Gebruik bij de onderstaande lijnen elk van deze methoden in ieder geval één keer.

- a $5x + 4y = 20$
- b $5x - 4y = 20$
- c $2x + y = 10$
- d $x - 2y = 10$

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Bij een lineair verband hoort in het algemeen de vergelijking $ax + by = c$.

Stel $a = 4$, $b = 2$ en $c = 6$, dan krijg je de vergelijking $4x + 2y = 6$.

Er is een aantal bijzondere gevallen:

- $a = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de x -as is;
- $b = 0$: de grafiek is een lijn die evenwijdig aan de y -as is;
- $c = 0$: de grafiek gaat door $O(0,0)$.

Wat gebeurt er met de grafiek als $a = b$, of $a = -b$?

Opgave 6

- a Hoe ziet de vergelijking van een verticale lijn eruit?
- b Waarom kun je bij een verticale lijn geen functievoorschrift opstellen?

Opgave 7

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met twee variabelen is:

$$ax + by = c.$$

- a Herleid deze vergelijking tot een functievoorschrift van de vorm $y = \dots$
- b Waarom moet bij a gelden dat $b \neq 0$?
- c Welk bijzonder geval krijg je als $a = 0$ terwijl $b \neq 0$ en $c \neq 0$?
- d Welk bijzonder geval krijg je als $b = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $c \neq 0$?
- e Welk bijzonder geval krijg je als $c = 0$ terwijl $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Opgave 8

Welke van deze vergelijkingen kun je herleiden tot een lineaire functie? Bepaal in die gevallen de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn en plot de grafiek met de grafische rekenmachine.

- a $2x - 3y = 12$
- b $2x - 3 = 12$
- c $x = -2y + 6$
- d $4y - 6 = 0$

Verwerken

Opgave 9

Teken de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

- a $-2x + 3y = 6$
- b $6x - 2y = 24$
- c $y = 2x + 1$
- d $4x + y = 10$
- e $20x = 45$
- f $y + 2 = 0$

Opgave 10

Gegeven zijn de lijnen $l: 2x - 4y = -3$ en $m: 5x + 4y = 8$.

- a Bereken van beide lijnen algebraïsch de snijpunten met de coördinaatassen.
- b Breng beide lijnen op de grafische rekenmachine in beeld.
- c Bepaal de coördinaten van hun snijpunt in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

Stel je voor dat je een groep van 180 personen van drinken wilt voorzien. Je koopt daarvoor literpakken appelsap en sinaasappelsap. Je hebt 90 pakken nodig. Appelsap kost € 0,90 per literpak en sinaasappelsap € 1,05 per literpak. Noem het aantal pakken appelsap a en het aantal pakken sinaasappelsap s . Aan de kassa moet je € 90,00 betalen.

- a Aan welke twee vergelijkingen moeten deze variabelen voldoen?
- b Plot de bijbehorende grafieken.
- c Bepaal hoeveel pakken appelsap en sinaasappelsap je hebt gekocht.

Opgave 12

Gegeven zijn de lijnen:

$$k: \frac{1}{3}x + \frac{1}{7}y = 21$$

$$l: 0,01x + 2,75 = y$$

$$m: x = 7y + 4$$

- a Bepaal algebraïsch het snijpunt van de lijnen k en l . Geef je antwoord als coördinaat en rond af op twee decimalen.
- b Bepaal algebraïsch het snijpunt van de lijnen k , l en m met de x -as. Geef je antwoord als coördinaat.

Opgave 13

Gegeven zijn de lijnen $l: 0,5y - 2x = c$ en $m: y - ax = -4$.

- a Voor welke a zijn de lijnen evenwijdig?
- b Voor welke c ligt het snijpunt van de lijnen op de y -as?
- c Voor welke a en c snijden de lijnen elkaar in het punt $(5,8)$?

Toepassen

Opgave 14: Oude puzzel

Deze puzzel wordt toegeschreven aan Euclides (ongeveer 300 voor Christus).

“Een ezel en een muildier sjokken voort, beladen met allemaal even zware zakken. De ezel zucht onder zijn last, waarop het muildier tegen zijn lotgenoot zegt: Wat kreun en jammer je toch! Tweemaal zoveel zou ik dragen als jij, als je mij één zak van jou zou geven, terwijl we evenveel zouden dragen als je er één van mij nam. Hoeveel zakken draagt ieder dier?”

Los de puzzel op.

Opgave 15: Ballenverkoop

Een winkelier verkoopt grote en kleine ballen. De grote ballen verkoopt hij voor € 8,50 en de kleine voor € 5,00. Op een dag heeft hij 60 ballen verkocht en dat leverde hem € 387,50 op.

Hoeveel grote en hoeveel kleine ballen heeft hij verkocht?

Testen

Opgave 16

Plot de grafieken van de volgende lineaire vergelijkingen en bepaal als dat mogelijk is de richtingscoëfficiënt.

- a** $5x + 2y = 10$
- b** $-2x + 5y = 7$
- c** $x = 4$
- d** $4 - 2y = 0$

Opgave 17

In een bak zitten 1000 pakjes. In een aantal van die pakjes zit een cadeautje van € 9,00, in de overige zit een cadeautje ter waarde van € 1,00. Het totale bedrag aan cadeautjes in de bak is € 3000,00. De vraag is: Hoeveel pakjes met een cadeautje van € 9,00 zitten er in de bak?

- a** Stel twee lineaire vergelijkingen op om dit probleem op te lossen.
- b** Plot de grafieken die bij deze vergelijkingen horen.
- c** Bepaal de oplossing van het probleem.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
