

3.1 Lineaire functies

Inleiding

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen een vast bedrag per m^3 , dat verschilt per regio. In een bepaalde regio zou je dus zeggen dat de kosten voor het verbruik van leidingwater recht evenredig zijn met de hoeveelheid die je verbruikt. Maar dat is niet zo... Je betaalt namelijk ook nog een soort van abonnementskosten, het vastrecht. Als het vastrecht € 65,00 per jaar is en je betaalt € 1,25 per m^3 , dan past hierbij een formule zoals $K = 1,25 \cdot a + 65$ als a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn. Er bestaat een lineair verband tussen K en a .



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een lineair verband tussen twee variabelen herkennen;
- bij een in woorden beschreven lineair verband een passende formule opstellen;
- de grafiek van een lineair verband tekenen en daarbij het begrip hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) gebruiken.

Voorkennis

- grafieken tekenen bij functies;
- werken met eenvoudige lineaire verbanden.

Verkennen

Opgave V1

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ waarin a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

- Breng de grafiek van K als functie van a goed in beeld met de grafische rekenmachine.
- In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Zullen er huishoudens van vier personen in deze regio zijn, die meer dan € 1000,00 per jaar aan water kwijt zijn?

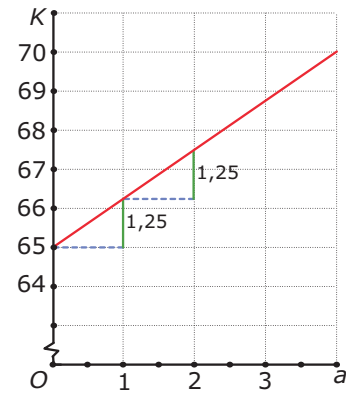
Uitleg

De kosten voor het verbruik van leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3 en het vastrecht is € 65,00 per jaar. Hierbij past de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ waarin a het jaarverbruik (in m^3) en K de jaarlijkse kosten zijn.

Zelfs als je geen water verbruikt betaal je toch € 65,00 per jaar voor de aansluiting. Dus bij $a = 0$ hoort $K = 65$.

Vervolgens zorgt elke extra m^3 water die je verbruikt voor een toename van K met 1,25. Dit betekent dat elke toename van a met 1 een stijging van K met 1,25 tot gevolg heeft. De grafiek wordt daarom een rechte lijn en het getal 1,25 bepaalt hoe steil die rechte lijn loopt. Je zegt dat er een lineair verband tussen a en K bestaat ('linea recta' betekent 'volgens een rechte lijn.') Het getal 1,25 noem je het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de lijn.

In Nederland wordt per persoon gemiddeld ongeveer 124 liter water per dag gebruikt. Dit betekent 45260 liter per persoon per jaar. Als een gemiddeld huishouden uit vier personen bestaat, dan is dit 181040 liter per jaar voor zo'n huishouden. Omgerekend naar kubieke meter is dit ongeveer $181,04 \text{ m}^3$ per jaar. Met behulp van de formule $K = 1,25 \cdot a + 65$ bereken je de kosten voor een gemiddeld huishouden in deze regio. Dit is dus € 291,30 per jaar.



Figuur 2

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg](#). In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 met een vastrecht van € 70,00 per jaar.

- Welke formule geldt voor K als functie van a , als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?
- Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?
- Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?
- Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water. Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?
- Bij welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van K zo in beeld dat voor een verbruik tot 300 m^3 de kosten zijn af te lezen uit de grafiek?
- Voor welke waarde van a geldt: $K(a) = 250$? Licht je antwoord toe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

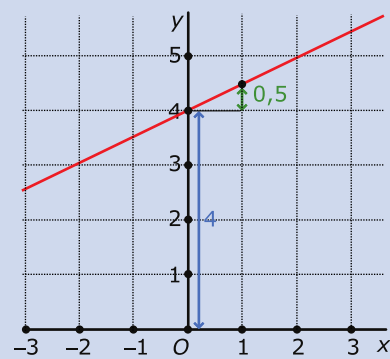
Bekijk de applet: lineaire functies

Als y een **lineaire functie** is van x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waar:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname per stap van 1, is;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$, is.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0, b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 ophoogt, neem de uitkomst met a toe. Het hellingsgetal a wordt ook wel de **richtingscoëfficiënt** genoemd, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong van het assenstelsel. De formule heeft dan de vorm $y = a \cdot x$. Je zegt in dat geval dat y **recht evenredig** is met x .



Figuur 3

Voorbeeld 1

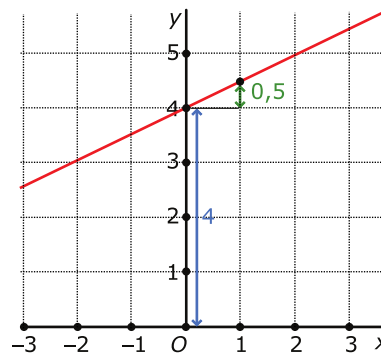
Bekijk de applet

Teken de grafiek bij het lineaire verband met de formule $y = 0,5x + 4$.

Antwoord

Er zijn twee manieren om dit te doen:

- Manier I: het begingetal is 4 dus de grafiek 'start' in $(0,4)$. Het hellingsgetal is 0,5, dus vanaf het punt $(0,4)$ ga je elke keer dat de x -waarde met 1 toeneemt 0,5 omhoog om een nieuw punt te vinden. Dit betekent dat de grafiek ook door bijvoorbeeld $(1; 4,5)$, $(2,5)$ en $(3; 5,5)$ gaat.
- Manier II: zoek twee punten van de grafiek. Bij $x = 0$ hoort $y = 4$. Bij $x = 6$ hoort $y = 0,5 \cdot 6 + 4 = 7$. Trek de lijn door de twee bijbehorende punten $(0,4)$ en $(6,7)$.



Figuur 4

Opgave 2

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is de functie $f(x) = -0,2x + 6$.

- Waaraan kun je zien dat de grafiek van f dalend is?
- Plot de grafiek van f en geef de coördinaten van de snijpunten met de assen.
- Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- De grafiek van lineaire functie g heeft hetzelfde hellingsgetal als de grafiek van f en gaat door het punt $(10,9)$. Bepaal het functievoorschrift van g .

Opgave 3

Elke lineaire functie heeft een voorschrift van de vorm $y = ax + b$.

- Neem $a = 2$ en $b = 3$ en breng de grafiek van deze functie in beeld. Ga na of de grafiek door het punt $(99,200)$ gaat.
- Neem $a = 2$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van b . Voor welke waarde van b gaat deze functie door het punt $(99,200)$?
- Neem $b = 3$. Bekijk de grafieken van deze lineaire functies voor verschillende waarden van a . Voor welke waarde van a gaat deze functie door het punt $(99,200)$?

Voorbeeld 2

Als een loodgieter bij iemand een reparatie moet uitvoeren, vraagt hij voorrijkosten, een uurtarief en materiaalkosten. Een bepaalde loodgieter vraagt € 35,00 aan voorrijkosten en het uurtarief is € 28,50. Als je niet op de materiaalkosten let, dan zijn de arbeidskosten A in euro alleen afhankelijk van de gewerkte tijd t in uren.

Welke formule kun je opstellen voor $A(t)$? En voor de totale kosten $K(t)$?

Bij welke formule is er sprake van een recht evenredig verband?

Antwoord

Elk gewerkt uur kost € 28,50, dus t uur werken kost $A = 28,50 \cdot t$ euro.

De arbeidskosten zijn recht evenredig met de gewerkte tijd.

Maar deze loodgieter kost als je hem belt om te komen in ieder geval € 35,00.

In totaal zijn de kosten dus: $K = 35 + 28,50 \cdot t$.

K is niet recht evenredig met t .

Opgave 4

Voor een rit met een taxi betaal je € 3,50 voorrijkosten en nog eens € 1,20 per gereden kilometer. Hierbij past een lineaire functie voor de ritprijs R afhankelijk van het aantal gereden km a .

- Is R recht evenredig met a ?
- Stel een formule op voor R als functie van a .
- Welk getal is de richtingscoëfficiënt van $R(a)$?
- Waarom heeft het nulpunt van $R(a)$ hier geen betekenis?
- Hoeveel betaal je voor een rit van 16 km?
- Hoeveel kilometer heb je gereden als je € 31,10 moet betalen?

Voorbeeld 3

De temperatuur hangt onder de juiste omstandigheden lineair af van de hoogte boven de zeespiegel. Zeker bij een wandeling in de bergen of bij een ballontochtje kun je dat goed merken. Een vuistregel is dat elke 100 meter stijging een temperatuurdaling van $0,6^\circ\text{C}$ betekent. Stel je voor dat het op 0 meter hoogte 24°C is. Welke formule kun je opstellen voor de temperatuur (in $^\circ\text{C}$) afhankelijk van de hoogte (in meter)? Bepaal met de grafische rekenmachine op welke hoogte de temperatuur voor het eerst onder 0°C komt.

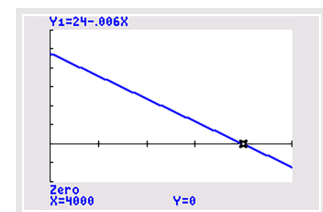
Antwoord

De temperatuurdaling per meter is $\frac{0,6}{100} = 0,006^\circ\text{C}$. De formule is daarom $T = 24 - 0,006h$, met h de hoogte in meter en T de temperatuur in $^\circ\text{C}$.

Maak vervolgens met je rekenmachine een geschikte grafiek, zorg ervoor dat de snijpunten met de assen goed in beeld komen. Het snijpunt met de y -as weet je al, dat is $(0,24)$.

Bepaal met je rekenmachine dat het snijpunt met de x -as gelijk is aan $(4000,0)$. Dus de temperatuur is 0°C als $h = 4000$ meter.

Het snijpunt met de x -as kun je ook uitrekenen door de vergelijking $24 - 0,006h = 0$ algebraïsch op te lossen.



Figuur 5

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** heb je kunnen lezen dat de temperatuur lineair afhangt van de hoogte boven de zeespiegel.

- Licht toe hoe je aan de formule $T = 24 - 0,006h$ komt.
- Bereken algebraïsch het nulpunt van T .
- Geef aan welke vensterinstellingen je gebruikt om de grafiek van T goed in beeld te krijgen.
- Hoe hoog is de temperatuur op de top van de Mount Everest (8884 meter boven de zeespiegel)?

Verwerken

Opgave 6

Bereken van de volgende lineaire functies de snijpunten van de grafieken met de assen.

- a $h(t) = 3t - 5$
- b $f(x) = x - 4$
- c $g(x) = -0,5x + 4$
- d $k(x) = -2(x + 3)$

Opgave 7

Fietser 1 gaat met een constante snelheid van 20 km/h van A naar B. Fietser 2 gaat met een constante snelheid van 25 km/h van B naar A. De afstand tussen A en B is voor beide fietsers 150 km. a is de afstand tot A en t is de tijd in uren.

- a Waarom is voor fietser 1 a recht evenredig met t en voor fietser 2 niet?
- b Stel voor beide fietsers een passende formule op voor het verband tussen a en t .
- c Na hoeveel tijd komen beide fietsers elkaar tegen? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

Gegeven is de functie $y_1 = -4 + 5x$.

- a De grafiek van y_1 wordt 10 eenheden langs de y -as omhoog geschoven. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek van y_2 die daardoor ontstaat.
- b De grafiek van y_1 wordt gespiegeld in de y -as. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek van y_3 die daardoor ontstaat.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - 0,5x$ en $g(x) = 2x - 1$.

- a Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafieken van deze functies met de beide assen.
- b Bereken algebraïsch het snijpunt van beide grafieken.

Opgave 10

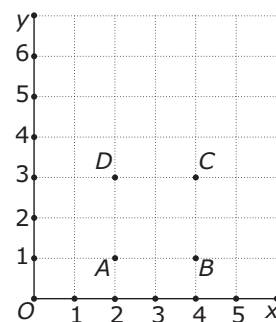
De Elfstedentocht is een schaatstocht langs de elf Friese steden. Het laatste stuk is een vrijwel rechte tocht van Dokkum naar Leeuwarden met een lengte van 26 km. Ireen komt na zeven uur schaatsen in Dokkum aan. Zij schaatst dit laatste stuk voor de wind met een vrijwel constante snelheid. Na drie kwartier is zij in Leeuwarden en heeft zij in totaal ongeveer 200 km afgelegd.

- a Met welke snelheid heeft zij het laatste deel van de tocht gereden?
- b Stel je voor dat t de tijd in uren is, $t = 0$ op het moment dat Ireen aan de Elfstedentocht begint. Verder is a de afgelegde afstand. Welk functievoorschrift $a(t)$ geldt er voor het laatste deel van haar tocht?
- c Ireen is tegelijk met Margot begonnen aan de schaatstocht. Margot komt echter twee uur na Ireen pas in Dokkum aan. Ook zij schaatst het laatste stuk met een constante snelheid, maar doet er een uur over. Welke formule geldt voor haar tocht van Dokkum naar Leeuwarden?

Opgave 11

Je ziet een assenstelsel met een vierkant $ABCD$ erin. In dit assenstelsel gaat de grafiek van een lineaire functie door het punt $(1,5)$.

- a** Leg uit waarom de bijbehorende formule $y = ax + 5 - a$ moet zijn.
- b** Voor welke waarden van a heeft de grafiek van deze functie geen punten met het vierkant gemeen?



Figuur 6

Toepassen

Opgave 12: Warmtepomp

Voor het plaatsen van een warmtepompsysteem vraagt bedrijf A € 45,00 voorrijkosten en € 60,00 per uur dat ze bezig zijn. Bedrijf B vraagt geen voorrijkosten, maar bij hen moet je € 70,00 per uur betalen.

- Waarom zijn de kosten K_B (in €) voor het plaatsen bij bedrijf B recht evenredig met de gewerkte tijd t (in uren)?
- Stel een formule voor zowel bedrijf A als bedrijf B op voor de kosten K (in €) als functie van de tijd t (in uren).
- Als het plaatsen van het warmtepompsysteem drie uur duurt, welk bedrijf is dan goedkoper?
- Na hoeveel uur is bedrijf A goedkoper?

De familie Berendsen heeft door bedrijf A een warmtepomp laten plaatsen, maar later kwamen ze erachter dat bedrijf B € 20,00 goedkoper zou zijn geweest als zij er net zo lang over hadden gedaan.

- Hoelang is bedrijf A met het plaatsen bezig geweest?

Opgave 13: Hoogte en luchtdruk

In de luchtvaart spelen hoogte en luchtdruk een belangrijke rol. De luchtdruk kan worden gemeten met een luchtdrukmeter. Uit de waarde van de gemeten luchtdruk kan de hoogte van het vliegtuig worden afgeleid. Luchtdruk wordt gemeten in millibar (mbar) en hoogte in feet (meervoud van foot, 1 foot $\approx$ 30 cm). Hoe hoger je vliegt, hoe lager de luchtdruk is.

Voor het verband tussen de hoogte en de luchtdruk wordt gebruikgemaakt van de volgende vuistregels:

- op zeeniveau (hoogte 0 foot) is de luchtdruk 1013 millibar;
- tot een hoogte van 12000 feet neemt de luchtdruk af met 1 millibar per 30 feet stijging.

Uit deze vuistregels is voor hoogten tot 12000 feet de volgende lineaire formule af te leiden:
 $h = 30390 - 30p$.

Hierin is h de hoogte in feet en p de luchtdruk in millibar.

- Toon aan dat de formule volgt uit de vuistregels.
Een vliegtuig stijgt van 0 foot naar 1000 feet.
- Bereken het percentage waarmee de luchtdruk tijdens deze stijging volgens deze formule afneemt. Rond je antwoord af op één decimaal.

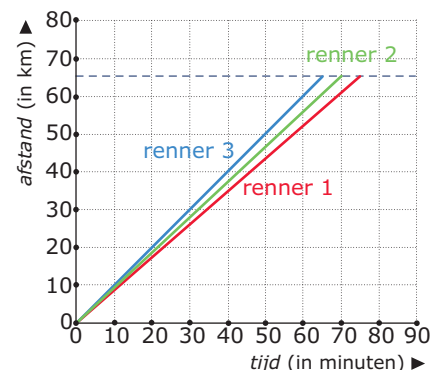
(naar: examen havo wiskunde B in 2012, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 14

In de Tour de France wordt een aantal keren een tijdrit gereden. In deze grafieken vind je gegevens over een tijdrit van 65 km.

- Welke renner heeft de tijdrit gewonnen? Waar zie je dat aan?
- Waarom kunnen deze grafieken nooit het werkelijke verloop van deze tijdrit correct beschrijven?
- Bereken van iedere renner de gemiddelde snelheid.
- Schrijf voor elke grafiek een passende formule op.



Figuur 7

Opgave 15

Gegeven is de lineaire functie f met voorschrift: $f(x) = 7x + 10$.

- a** Bereken exact de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as.
- b** De grafiek van f wordt 3 eenheden in de y -richting omlaag geschoven. Welk functievoorschrift hoort bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat?
- c** De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$. De nieuwe grafiek gaat door $(10,15)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?
- d** De grafiek van f wordt gedraaid om het punt $(0,10)$ en vervolgens 2 eenheden omhoog geschoven. De nieuwe grafiek gaat door $(10,0)$. Welk functievoorschrift past bij die nieuwe grafiek?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
