

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Functies en grafieken**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- functie — invoerwaarde — functiewaarde — functievoorschrift
- domein — bereik — nulwaarden/nulpunten — extremen/toppen
- asymptoten — karakteristieken (nulpunten, toppen, asymptoten)
- samengestelde functie — rekenschema — inverse functie
- transformaties — verschuiven (translatie) — lijnvermenigvuldiging

Activiteitenlijst

- functies herkennen — de notaties bij het functiebegrip gebruiken
- het domein en het bereik van een functie bepalen — de intervalnotatie gebruiken
- asymptoten bepalen — karakteristieken van een functie bepalen
- bij een functie de inverse functie bepalen
- transformaties herkennen en uitvoeren

Achtergronden

René Descartes (1596 - 1650) – een Franse geleerde die een groot deel van zijn leven in De Nederlanden woonde – bedacht dat je lijnen en krommen kunt beschrijven met formules in x en y als je een assenstelsel invoert. Maar in die tijd werden deze lijnen en krommen als statische meetkundige objecten beschouwd, waaraan je, door ze in algebraïsche taal om te vormen, gemakkelijk kunt rekenen.

Pas nadat **Isaac Newton (1642 - 1727)** de natuurkundige bewegingswetten in wiskunde omzette, werden formules gebruikt om verbanden tussen variabelen te beschrijven. Daarmee ontstond langzamerhand het functiebegrip: bij een bepaald tijdstip hoorde een bepaalde afgelegde afstand, die afstand was een functie van de tijd.

De wiskundige **Leonhard Euler (1707 - 1783)** voerde de notatie $f(x)$ in. In 1748 schreef Euler het boek 'Introductio in analysin infinitorum', waarin de fundamenteën van de analyse van functies systematisch uiteen werden gezet. Daarmee is hij de grondlegger van de functietheorie.



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x^2(x + 20)$ en $g(x) = 50x^2$.

- Bereken algebraïsch de nulpunten van f .
- Plot de grafieken van f en g , zodat alle karakteristieken goed te zien zijn.
Schrijf op welke vensterinstellingen je hebt gebruikt.
- Bereken de snijpunten van de grafieken van f en g .

Opgave 2

Bereken algebraïsch bij de functies eerst de nulpunten. Bepaal vervolgens het domein en bereik van de functies.

- a $f(x) = x^2(x^2 - 400)$
- b $g(x) = \sqrt{20 - x} - 40$

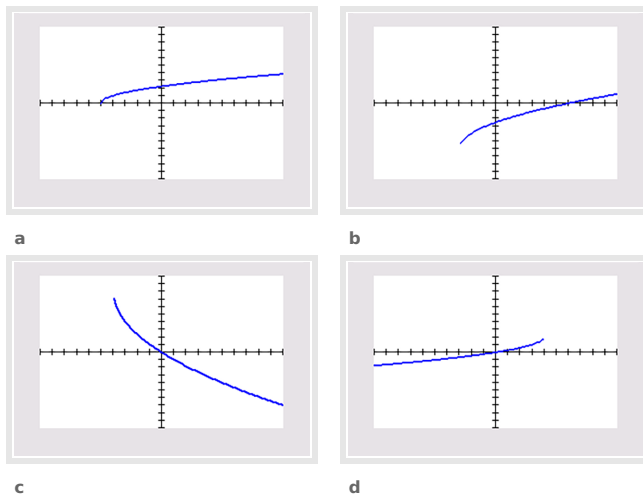
Opgave 3

Gegeven is de functie $y(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$.

- a Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- b Geef het domein en bereik van f .
- c Los algebraïsch op: $y = 2$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

Je ziet vier grafieken die zijn ontstaan door op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ één of meer transformaties toe te passen. Steeds zijn de standaardinstellingen van het venster van de grafische rekenmachine gebruikt.



Figuur 2

Schrijf bij elke grafiek het juiste functievoorschrift op.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0,25(x - 10)^2 - 16$.

- a Door welke transformaties kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?
- b Bepaal de top en de nulpunten van de grafiek van f .

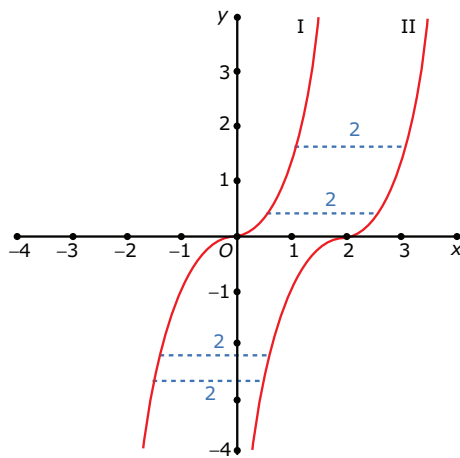
Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = -2x + 4$ en $g(x) = -2x - 2$.

- a Geef het functievoorschrift van $h(x) = f(g(x))$.
- b Geef het voorschrift van f^{inv} .

Opgave 7

In de figuur zie je de grafieken I en II. I is de grafiek van $y = x^3$. Grafiek II ligt rechts van I, zodanig dat alle horizontale verbindingslijnstukken van I en II de lengte 2 hebben.



Figuur 3

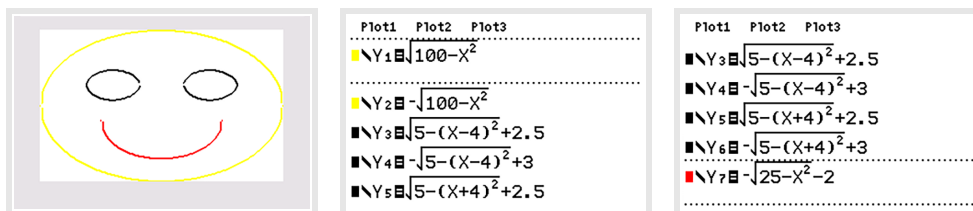
- Geef een bij grafiek II passend functievoorschrift.
- De verticale verbindingslijnstukken van I en II variëren in lengte. Bereken de waarden van x waarvoor die lengte 26 is.
- Bereken de kortste lengte van zo'n verticaal verbindingslijnstuk.

Toepassen

Opgave 8: Smiley

Door gebruik te maken van de juiste functies (en transformaties) kun je smiley's maken op de grafische rekenmachine. Dat is best een aardige sport en nog leerzaam ook...

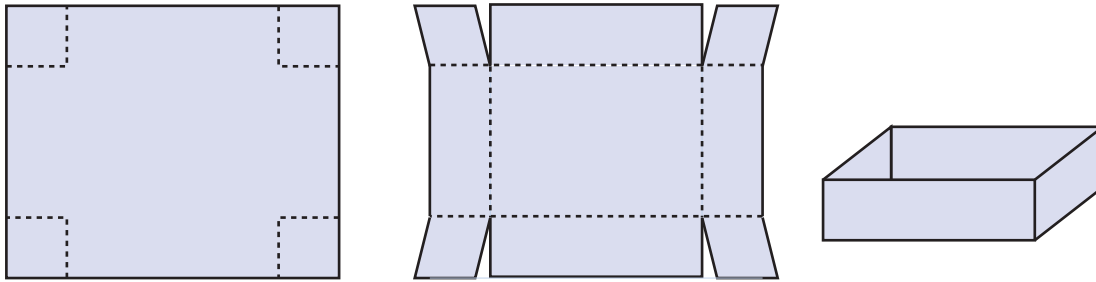
De smiley hieronder bestaat uit een groot aantal halve cirkels. Omdat voor elk punt (x, y) op een cirkel om de oorsprong $O(0,0)$ met straal 10 geldt: $x^2 + y^2 = 100$, noem je dit wel de vergelijking van deze cirkel. Om de GR te kunnen gebruiken zet je de vergelijking om in een functievoorschrift, eigenlijk in twee functievoorschriften. Ga na, dat: $y = \pm\sqrt{100 - x^2}$. Deze formules zijn gebruikt om de buitenste cirkel (twee halve cirkels) van de smiley te maken, zoals je ziet. De andere halve cirkels krijg je door de straal kleiner te maken en transformaties toe te passen. Tenslotte zet je het assenstelsel even uit. Maak zelf een smiley en laat een medeleerling bedenken welke formules je hebt gebruikt. Doe daarna het omgekeerde.



Figuur 4

Opgave 9: Kartonnen bakje

Van een rechthoekig stuk karton van 12 cm bij 20 cm kun je een bakje maken. Je knipt dan de vier hoeken even ver in, zoals je in de figuren kunt zien.



Figuur 5

Als je er op dezelfde wijze een deksel bij maakt, krijg je een doosje waarvan de inhoud I wordt bepaald door de afmetingen van het bakje.

- Noem de lengte en de breedte van het ingeknipte stukje x . Stel een formule op voor $I(x)$.
- Bepaal het domein en het bereik van $I(x)$.
- Hoe ver moet je het karton inknippen om een maximale inhoud te krijgen?

Examen

Opgave 10: Wortelfunctie

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{1-2x}$. T en S zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as.

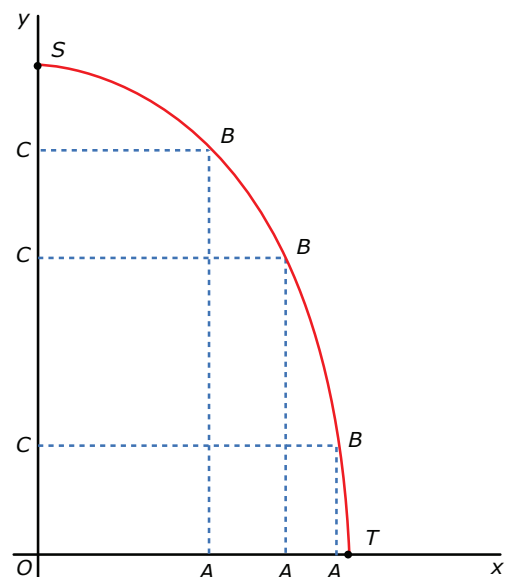
- Bereken de coördinaten van T en S .
- Geef het domein en bereik van f .
- In de figuur zie je hoe punt B de grafiek van f doorloopt tussen T en S . Als B niet samenvalt met T of S is $OABC$ een rechthoek. Er is één plaats van B waarbij $OABC$ een vierkant is.

Bereken de coördinaten van deze plaats. Rond af op twee decimalen.

- Als B van T naar S beweegt over de grafiek van f , neemt de oppervlakte van $OABC$ eerst toe en later weer af. Iemand heeft het vermoeden dat de oppervlakte van $OABC$ maximaal is wanneer $OABC$ een vierkant is.

Onderzoek of dit vermoeden juist is.

(naar: examen havo B in 1991, tweede tijdvak)



Figuur 6

Opgave 11: Gebroken functie

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{136x^2}{x^4+16}$ voor $-10 \leq x \leq 10$.

- Breng de grafiek van f zo in beeld dat de hoogste en laagste functiewaarden zichtbaar zijn. Bepaal het bereik van f .
- Los algebraïsch op: $f(x) \geq 8$.
- De grafiek van de functie $g(x) = f(x) + c$ raakt de lijn $y = 10$. Bepaal met behulp van de grafiek voor welke waarden van c dit het geval is.

(bron: examen wiskunde B havo 1989 - I)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
