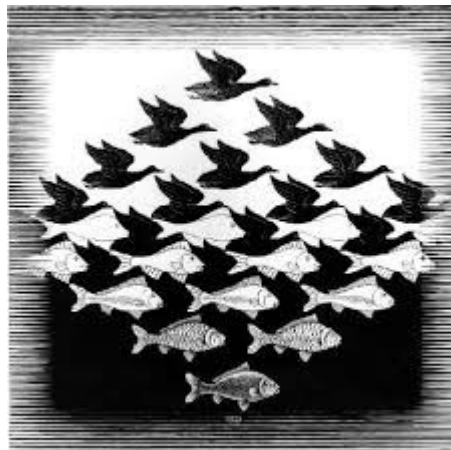


2.5 Transformaties

Inleiding

Veel functies ontstaan vanuit een eenvoudige standaardfunctie door in het voorschrift een getal op te tellen en/of met een getal te vermenigvuldigen. De grafieken van dergelijke functies lijken dan sterk op die van de standaardfunctie. En de karakteristieken van die grafieken zijn uit die van de standaardfunctie af te leiden. Zo zijn alle functies van de vorm $y = ax + b$ af te leiden uit de standaardfunctie $y = x$. En dus hebben ze dezelfde grafiek, namelijk een rechte lijn.

Bij dit onderdeel heb je bij enkele opgaven een computer nodig!



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met transformaties van grafieken;
- grafieken van functies die door transformatie ontstaan uit een standaardfunctie afleiden uit de grafiek van die standaardfunctie.

Voorkennis

- de karakteristieken van een functie bepalen en zo de grafiek goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven;
- werken met de belangrijkste standaardfuncties.

Verkennen

Opgave V1

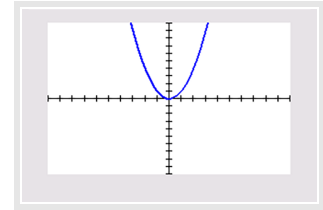
In de applet kun je de grafiek van g met de schuifbalkjes vervormen en/of verschuiven.

[Bekijk de applet](#)

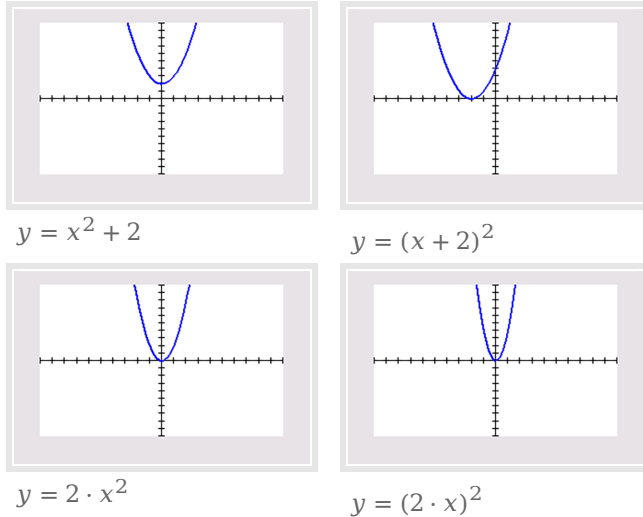
- Maak de grafiek van $g_1(x) = (x - 4)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_1(x) = x^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_1(x) = 1,5 \cdot x^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_1(x) = (3 \cdot x)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f .
- Maak de grafiek van $g_1(x) = 1,5(x - 4)^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f .

Uitleg

Bekijk hier de grafiek van de standaard kwadratische functie $f(x) = x^2$ op de grafische rekenmachine met de standaardinstellingen. Door in het functievoorschrift met een getal een vermenigvuldiging uit te voeren of een optelling te doen, verander je de grafiek van deze standaardfunctie. Dat heet wel: de grafiek transformeren (vervormen).



Figuur 2



Figuur 3

Je moet vier van die transformaties kennen.

- De grafiek van $y = x^2 + 2$ ontstaat door alle y -waarden met 2 te verhogen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder omhoog van de x -as af te liggen. Dit heet 2 eenheden verschuiven ten opzichte van de x -as.
- De grafiek van $y = (x + 2)^2$ ontstaat door alle x -waarden met 2 te verlagen. De punten van de grafiek komen daarom 2 eenheden verder naar links van de y -as af te liggen. Dit is hetzelfde als -2 eenheden verschuiven ten opzichte van de y -as.
- De grafiek van $y = 2 \cdot x^2$ ontstaat door alle y -waarden 2 keer zo groot te maken. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zo ver van de x -as af te liggen. Dit heet met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.
- De grafiek van $y = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door alle x -waarden met 2 te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom $\frac{1}{2}$ keer zo ver van de y -as af te liggen. Dit is hetzelfde als met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as.

Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

- $y_2 = 0,5 \cdot x^2$
- $y_3 = (x - 4)^2 + 2$
- $y_4 = 2 - x^2$
- $y_5 = (3x)^2 + 2$

Opgave 2

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door transformatie van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn.

- a $y_2 = 3 \cdot x^3$
- b $y_3 = (x + 4)^3 + 2$
- c $y_4 = 5 - 2x^3$
- d $y_5 = (0,5x)^3 + 1$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Ga uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

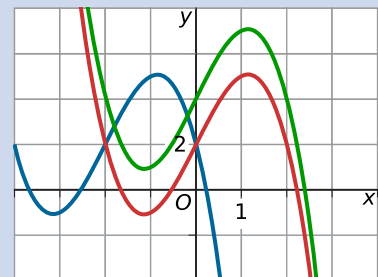
- De groene grafiek $y = f(x) + 2$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x -as 2 eenheden te verschuiven.
- De blauwe grafiek van $y = f(x + 2)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y -as -2 eenheden te verschuiven.

Dit zijn twee **transformaties van een grafiek**. Door het optellen van een getal in het functievoorschrift verschuift de grafiek. In plaats van **verschuiving** spreek je ook wel van **translatie**. De karakteristieken van de getransformeerde functies kun je afleiden uit die van de gegeven functie.

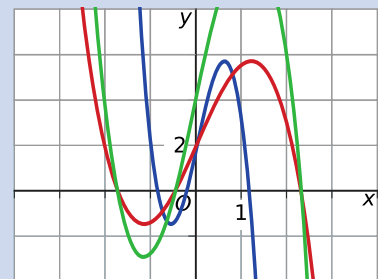
Ga weer uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek $y = 2 \cdot f(x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x -as met factor 2 te vermenigvuldigen.
- De blauwe grafiek $y = f(2 \cdot x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

Ook dit zijn twee transformaties van een grafiek. Door het vermenigvuldigen van een getal in het functievoorschrift wordt de grafiek vermenigvuldigd vanuit een as. Dit noem je **vermenigvuldiging ten opzichte van een as**. De karakteristieken van de getransformeerde functies kun je afleiden uit die van de **standaardfunctie**.



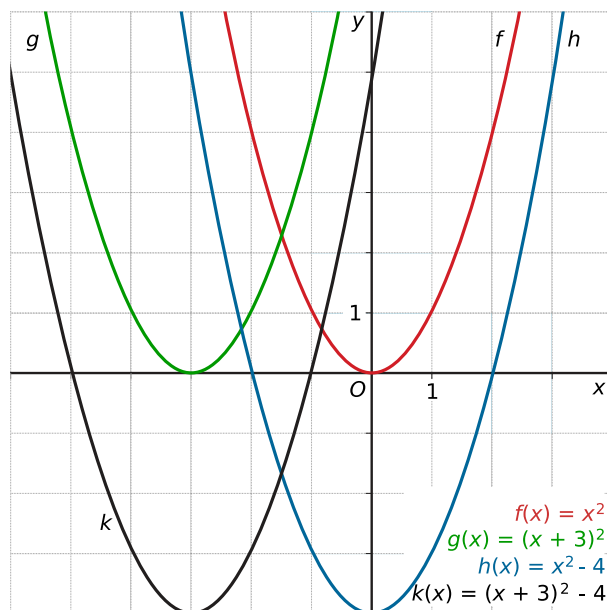
Figuur 4



Figuur 5

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Grafieken verschuiven



Figuur 6

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = f(x-2) + 3 = (x-2)^2 + 3$ ontstaat uit de grafiek van f door translatie van 2 ten opzichte van de y -as en een translatie van 3 ten opzichte van de x -as. (Je zegt ook wel 2 naar rechts en 3 omhoog verschuiven.)

De grafiek van f heeft als top $(0,0)$, de top van de grafiek van g is $(2,3)$.

In het algemeen geldt dat de grafiek van $g(x) = f(x-c) + d$ ontstaat uit de grafiek van f door translatie van c ten opzichte van de y -as en een translatie van d ten opzichte van de x -as.

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is $g(x) = f(x-2) = (x-2)^2 - 2(x-2) = (x-2)^2 - 2x + 4 = x^2 - 6x + 8$. Je vervangt dus elke x in de formule door $x-2$. Denk daarbij om de haakjes.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** is de grafiek van functie f met een voorschrift $f(x) = x^2$ gegeven.

- Maak de grafiek van $g_1(x) = f(x+2)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f ?
 - Maak de grafiek van $g_2(x) = f(x) + 2$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f ?
- Neem nu aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.
- Schrijf het voorschrift van g_1 op.
 - Schrijf het voorschrift van g_2 op.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

- Plot de grafiek van f .
- Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(x+2)$ op. Plot de grafiek van g_1 . Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f ?
- Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = f(x) - 2$ op. Plot de grafiek van g_2 . Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f ?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Grafieken vermenigvuldigen

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

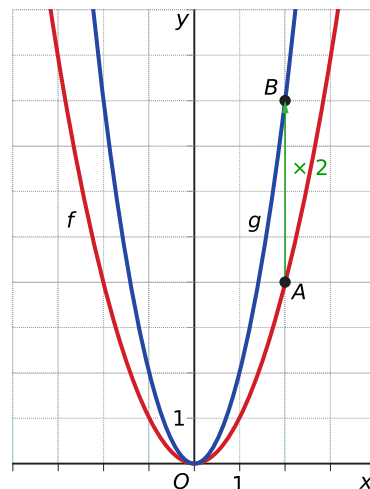
De grafiek van $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 2.

Je ziet in de grafiek dat de y -coördinaat van punt B gelijk is aan 8 en dat is twee keer zo groot als de y -coördinaat van punt A .

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is

$g(x) = 2 \cdot f(x) = 2(x^2 - 2x) = 2x^2 - 4x$. Je vermenigvuldigt dus de hele formule met 2.

In het algemeen: de grafiek van $g(x) = d \cdot f(x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met d .



Figuur 7

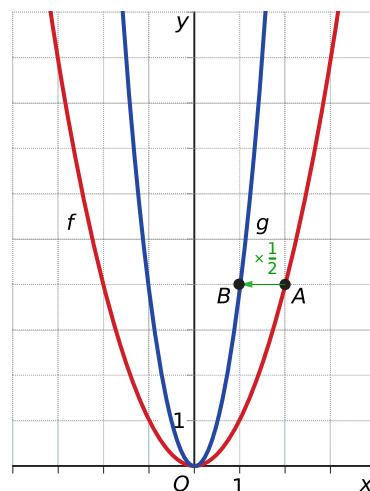
De grafiek van $g(x) = f(2x) = (2x)^2$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de x -coördinaat van punt B 1 is en dat is een $\frac{1}{2}$ keer zo groot als de x -coördinaat van punt A .

Let op: stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan is

$g(x) = f(2x) = (2x)^2 - 2 \cdot 2x = 4x^2 - 4x$. Je vervangt dus elke x in de formule door $2x$.

In het algemeen: de grafiek van $g(x) = f(c \cdot x)$ ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{c}$.



Figuur 8

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** is de grafiek van functie f met een voorschrift $f(x) = x^2$ gegeven.

- Maak de grafiek van $g_1(x) = f(2 \cdot x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f ?
- Maak de grafiek van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$. Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f ?
Neem nu aan dat $f(x) = x^3 - 4x$.
- Schrijf het voorschrift van g_1 op.
- Geef het functievoorschrift van g_2 .
- Oefen dit met andere functies g_1 en g_2 .

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

- Plot de grafiek van f .
- Schrijf het functievoorschrift van $g_1(x) = f(2x)$ op. Plot de grafiek van g_1 . Hoe ontstaat de grafiek van g_1 uit die van f ?

- c Schrijf het functievoorschrift van $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van g_2 . Hoe ontstaat de grafiek van g_2 uit die van f ?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: Transformaties

De grafiek van $g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d$ ontstaat uit die van f door de vier transformaties toe te passen. Bekijk nog eens goed (met behulp van de schuifbalkjes) welke transformaties je in welke volgorde toepast.

Opgave 7

In de applet in het voorbeeld kun je alle vier de transformaties toepassen op functie f .

Geef bij elk van de functies aan welke transformaties je moet toepassen om de grafiek uit die van f te laten ontstaan. (Let op de volgorde!)

- a $g(x) = 2 \cdot f(x) + 3$
- b $h(x) = f(x - 4) + 2$
- c $k(x) = 2 - f(x)$
- d $l(x) = f(3x) + 2$
- e $m(x) = 2 \cdot f(3(x - 1)) + 4$

Opgave 8

Schrijf het functievoorschrift op van g als de grafiek uit die van f ontstaat door de genoemde transformaties.

- a Ten opzichte van de x -as met -2 vermenigvuldigen en dan translatie van 1 ten opzichte van de x -as toepassen.
- b Ten opzichte van de y -as met 2 vermenigvuldigen en dan een translatie van -3 ten opzichte van de x -as toepassen.
- c Ten opzichte van de y -as met $0,5$ vermenigvuldigen, gevolgd door een translatie van 4 ten opzichte van de y -as.
- d Ten opzichte van de y -as een translatie van 4 , dan ten opzichte van de y -as een vermenigvuldiging met $0,5$ en ten slotte een translatie ten opzichte van de x -as van -2 toepassen.

Voorbeeld 4

Als je een grafiek op de grafische rekenmachine wilt maken, dan moet je geschikte vensterinstellingen geven. Dan kan het nuttig zijn om te zien dat een bepaalde functie door transformatie kan ontstaan uit een veel eenvoudiger standaardfunctie. Zeker als je van die standaardfunctie alle karakteristieken weet.

Hoe breng je de grafiek van $f(x) = 200 - 5(x - 30)^2$ goed in beeld?

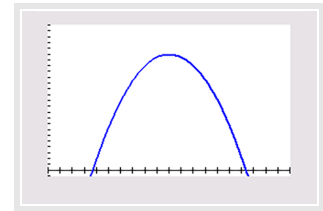
Antwoord

Je herkent dan de functie als $f(x) = -5(x - 30)^2 + 200$ met als bijbehorende standaardfunctie $y = x^2$. Die standaardfunctie heeft als grafiek een dalparabool met top $(0,0)$. De grafiek van f ontstaat uit die van $y = x^2$ door:

- een verschuiving van 30 ten opzichte van de y -as;
- een vermenigvuldiging van -5 ten opzichte van de x -as;
- een verschuiving van 200 ten opzichte van de x -as.

De top van de grafiek van f is daarom $(30,200)$ en de grafiek is een bergparabool.

De grafiek van $y = x^2$ is goed in beeld met venster $[-10,10] \times [-10,10]$. Op dit venster kun je ook de beschreven transformaties toepassen. De grafiek van f is daarom goed in beeld op $[20,40] \times [-10,250]$.



Figuur 9

Opgave 9

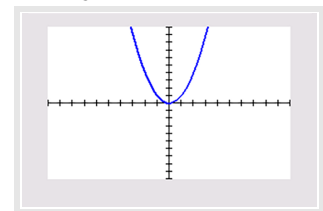
Gegeven is de functie $f(x) = 0,25(x - 5)^4 - 10$. De grafiek van deze functie kan door transformaties ontstaan uit die van de bijbehorende standaardfunctie.

- Welke standaardfunctie is dat?
- Welke transformaties moeten er dan achtereenvolgens worden toegepast?
- Bepaal nu het minimum van de grafiek van de gegeven functie. Voor welke waarde van x treedt dit minimum op?

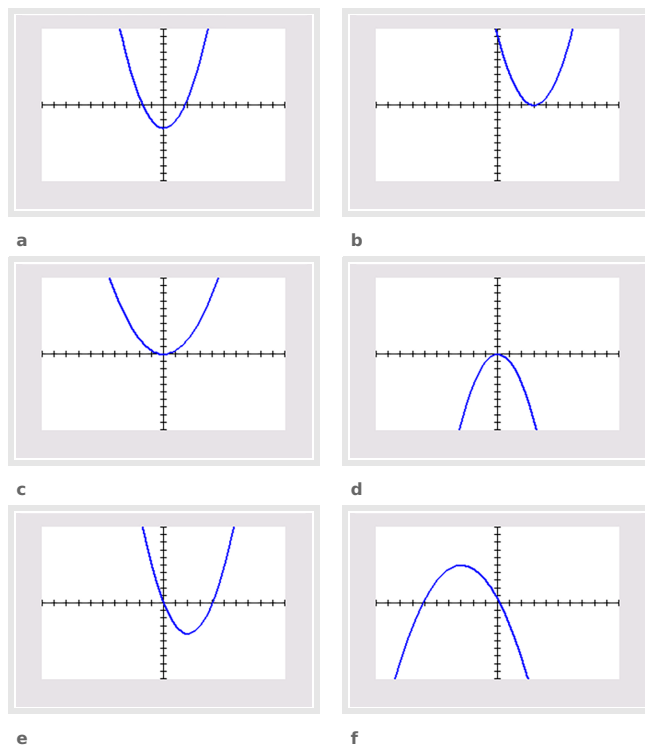
Opgave 10

Je ziet de grafiek van $y_1 = x^2$ met de standaardinstellingen van het venster van je rekenmachine.

Bekijk de zes grafieken in de standaardinstellingen van het venster van de grafische rekenmachine. Ze zijn allemaal ontstaan uit transformatie van de grafiek van y_1 . Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast. Schrijf ook het juiste functievoorschrift op.



Figuur 10



Figuur 11

Opgave 11

De grafiek van de functie f met $f(x) = (x - 20)^2 + 200$ komt met de standaardinstellingen van het venster op de grafische rekenmachine niet in beeld.

Leg uit hoe je door het toepassen van transformaties de vensterinstellingen in één keer zo kunt maken, dat die grafiek wel goed in beeld komt.

Verwerken

Opgave 12

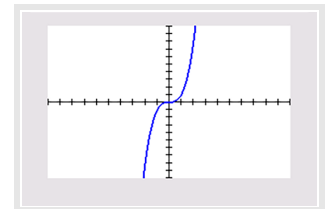
Ga uit van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. De grafieken van de functies kun je door transformatie van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke transformaties dat zijn en geef de bijbehorende formules.

- a $y_2 = 0,5 \cdot f(x)$
- b $y_3 = f(x - 4) + 2$
- c $y_4 = 2 - f(x)$
- d $y_5 = f(3x) - 4$

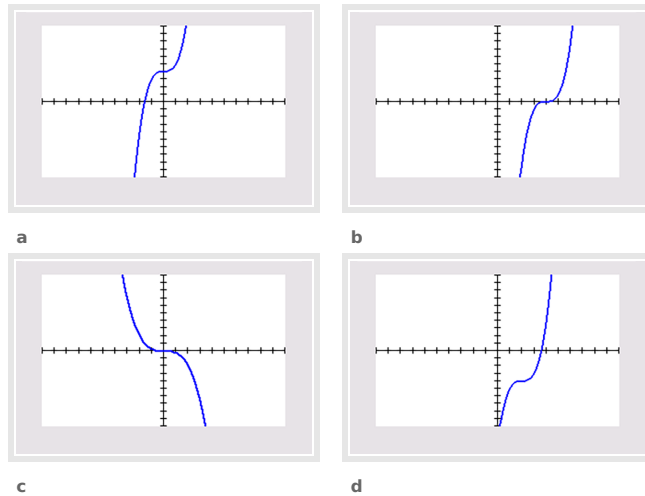
Opgave 13

Je ziet vijf keer het venster van de grafische rekenmachine met de basisinstellingen. De standaardfunctie is $y_1 = x^3$.

De overige grafieken zijn door transformatie van die grafiek ontstaan. Geef bij elke functie het juiste voorschrift.



Figuur 12

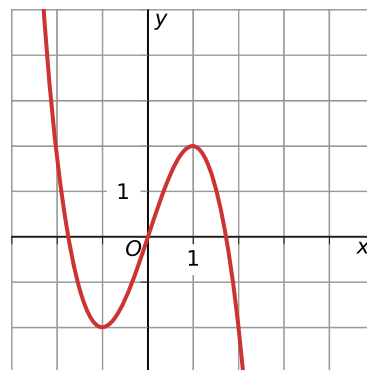


Figuur 13

Opgave 14

Je ziet de grafiek van $y_1 = f(x)$. Neem de grafiek over op een roosterblad. Teken de grafieken van de volgende functies. Schrijf erbij welke transformaties je toepast.

- a $y_2 = f(x - 2)$
- b $y_3 = -2 \cdot f(x)$
- c $y_4 = f(x) - 2$
- d $y_5 = f(2x) - 1$



Figuur 14

Opgave 15

De grafiek van $g(x) = x^2 + bx + c$ heeft als top de coördinaten $(-1, 6)$. Geef aan door welke translaties de grafiek van g uit een standaardgrafiek ontstaat en bereken b en c .

Opgave 16

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$.

- a De grafiek van y_1 ontstaat door op de grafiek van f een translatie van -2 ten opzichte van de y -as en een translatie van 5 ten opzichte van de x -as toe te passen. Geef het functievoorschrift en het domein en bereik van y_1 .
- b De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van f eerst te vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x -as, vervolgens de translatie van 3 ten opzichte van de y -as toe te passen en tot slot nog de translatie van -4 ten opzichte van de x -as toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_2 en het domein en bereik daarvan.
- c De grafiek van y_3 ontstaat door de grafiek van f eerst te vermenigvuldigen met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as, vervolgens de translatie van 2 ten opzichte van de y -as toe te passen en tot slot nog de translatie van 4 ten opzichte van de x -as toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_3 en het domein en bereik daarvan.

Opgave 17

- a De grafiek van functie $g(x) = x^2 + 2x - 3$ ontstaat uit transformaties van de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. Welke transformaties zijn dat?
- b De functie $h(x) = 2x^2 - 4x + 7$ ontstaat uit transformaties van de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = x^2$. Welke transformaties?

Toepassen

Opgave 18: Weggeslingerde kogel

Een weggeslingerde kogel beschrijft ten opzichte van een Oxy -assenstelsel de volgende baan: $y = -0,02(x - 10)^2 + 4$. Het moment van loslaten ligt op $y = 2$. Dit is bij $x = 0$. y en x zijn beide in meter uitgedrukt.

- a Geef geschikte vensterinstellingen zodat je de volledige baan van de kogel op de grafische rekenmachine in beeld kunt krijgen.
- b Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.
- c Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

Opgave 19: Grafiek verschuiven

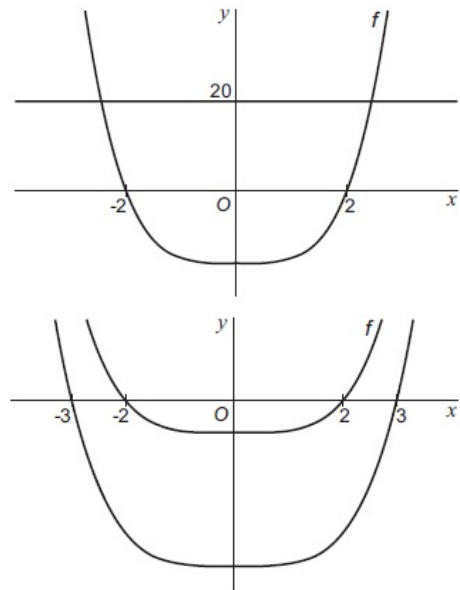
Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$. De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $(-2,0)$ en $(2,0)$. In de figuur zijn de grafiek van f en de lijn $y = 20$ getekend.

- a** Bereken exact voor welke waarden van x de grafiek van f tussen de x -as en de lijn $y = 20$ ligt.

Door de grafiek van f omlaag te schuiven, veranderen de snijpunten met de x -as in de punten $(-3,0)$ en $(3,0)$. In de figuur zijn de grafiek van f en de verschoven grafiek getekend.

- b** Bereken hoeveel de grafiek van f omlaag is geschoven.

(bron: examen havo wiskunde B in 2006, tweede tijdvak)



Figuur 15

Testen

Opgave 20

Gegeven is een functie $y_1 = f(x)$. Welke transformaties moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies?

- a** $y_2 = f(x - 3)$
- b** $y_3 = 0,5 \cdot f(x) + 1$
- c** $y_4 = f(3x)$

Opgave 21

Om de grafiek van $f(x) = 10\sqrt{x} + 50$ goed in beeld te krijgen op de grafische rekenmachine, moet je weten hoe deze ontstaat door transformatie van de bijbehorende standaardfunctie.

- a** Welke standaardfunctie is dat?
- b** Welke transformaties moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?
- c** Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek van f goed in beeld komt.

Opgave 22

Je ziet de grafiek van een functie g die door transformatie is ontstaan uit de grafiek van $f(x) = x^3$. De grafiek van g gaat door het punt $(7,6)$.

Schrijf het bijpassende functievoorschrift op.



Figuur 16



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
