

## 2.3 Karakteristieken

### Inleiding

Om functies te kunnen bestuderen is het vaak handig als je bijbehorende grafieken kunt bekijken. Je wilt dan alle snijpunten met de assen, toppen etcetera kunnen zien. Je leert deze karakteristieken vinden.

#### Je leert in dit onderwerp

- wat asymptoten zijn;
- de karakteristieken van (de grafiek van) een functie bepalen;
- extremen van een functie bepalen met behulp van de grafische rekenmachine.

#### Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

### Verkennen

#### Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Het maken van een kopie kost € 0,06. Op school staat zo'n apparaat voor de leerlingen. De leerlingen betalen € 0,10 per kopie.

- Geef een formule voor de kosten per kopie ( $K$ ) als functie van het aantal kopieën ( $a$ ).
- Welke waarde benaderen de functiewaarden als  $a$  heel groot wordt?
- En als  $a$  dicht bij 0 komt?

#### Uitleg

Voor een rit in een taxi betaal je:

- voorrijkosten € 3,20
- per gereden kilometer € 1,20

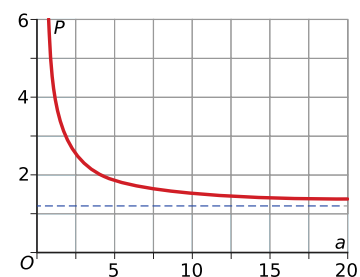
De prijs  $P$  per gereden km hangt af van het aantal gereden km  $a$ .

Er geldt:  $P = 1,20 + \frac{3,20}{a}$ .

De grafiek van deze functie snijdt de horizontale as niet en heeft geen extremen. Er geldt:

- Als  $a$  (het aantal gereden kilometers) heel groot wordt, benaderen de functiewaarden het getal 1,20. Je ziet dat als je een tabel bij de functie maakt. Dit betekent dat de grafiek steeds dichterbij de lijn  $P = 1,20$  komt te liggen, maar deze niet raakt. Deze lijn heet de horizontale asymptoot van de grafiek van  $P$ .
- Als  $a$  dicht bij 0 komt, worden de functiewaarden steeds groter:  $P(0,1) = 33,20$ ;  $P(0,01) = 321,20$ ;  $P(0,001) = 3201,20$ ;  $P(0,0001) = 32001,20$ ; enzovoort. Het getal 0 zelf mag je echter niet voor  $a$  invullen: delen door 0 kan niet. Dit betekent dat de grafiek steeds dichterbij de lijn  $a = 0$  (de verticale as) komt te liggen, maar niet raakt. Dit is de verticale asymptoot van de grafiek van  $P$ .

Als je de grafiek van de functie tekent, zorg je ervoor dat ook dit soort karakteristieke gedrag zichtbaar wordt, net als snijpunten met de assen en toppen (als ze er zijn).



Figuur 1

## Opgave 1

Van een bepaald type kopieerapparaat worden de maandelijkse kosten per kopie gegeven door:  $K(a) = \frac{200}{a} + 0,075$ . Hierin is  $a$  het aantal kopieën per maand en  $K$  zijn de kosten in euro.

- Bereken de kosten per kopie als er 10000 kopieën per maand met deze machine worden gemaakt.
- Welke waarde benaderen de kosten per kopie als het aantal kopieën heel erg groot is?
- Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van  $K$ ?
- Als er een bepaalde maand geen kopieën worden gemaakt, kun je niet spreken van de kosten per kopie. Het minimale aantal kopieën waarbij dit nog wel kan is 1. Hoeveel bedragen de kosten per kopie maximaal?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

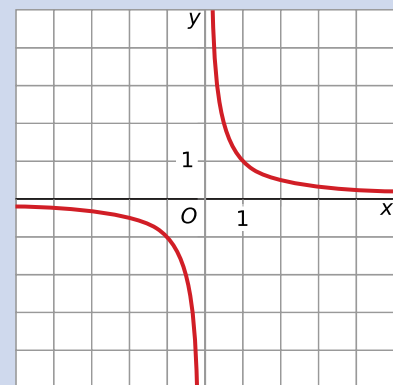
Bij grafieken komen regelmatig asymptoten voor. Dat zijn lijnen waar de grafiek steeds dichterbij komt naarmate je verder van de oorsprong van het assenstelsel komt. Vooral een **verticale asymptoot** kun je vaak goed in het functievoorschrift herkennen: een invoerwaarde waarbij je door 0 moet delen veroorzaakt vaak zo'n asymptoot. Een **horizontale asymptoot** ontstaat als de functiewaarden een vast getal naderen naarmate de invoerwaarden heel groot of heel klein (erg negatief) worden.

De functie  $f$  met voorschrift  $f(x) = \frac{1}{x}$  is de standaardfunctie van een functie met asymptoten. Deze grafiek heeft:

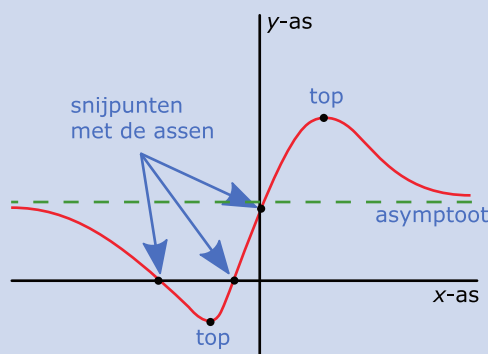
- als horizontale asymptoot de lijn  $y = 0$ , want voor grote en kleine (erg negatieve) waarden van  $x$  naderen de functiewaarden naar 0;
- als verticale asymptoot de lijn  $x = 0$ , want dit getal heeft geen functiewaarde (je kunt niet door 0 delen) en vlak in de buurt van 0 worden de functiewaarden heel groot of heel klein (erg negatief).

Het domein van  $f$  schrijf je als  $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ .

Het bereik van  $f$  schrijf je als  $B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ .



Figuur 2



Figuur 3

Als je de grafiek van een functie goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar (op het gewenste domein). Dat kunnen zijn:

- de **snijpunten met de assen**;
- de **asymptoten**;
- de **toppen**.

## Voorbeeld 1

### Bekijk de applet

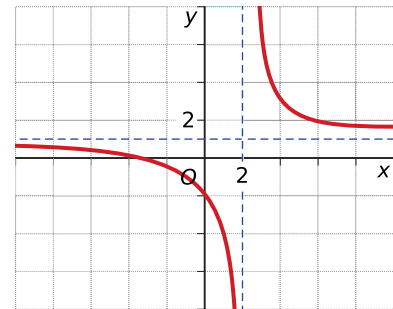
De grafiek van  $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$  heeft twee asymptoten. Welke twee? Schrijf het domein en bereik van  $f$  op.

Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen is er iets bijzonders als  $x-2=0$  en dus als  $x=2$ .  $f(2)$  bestaat niet, maar  $x$ -waarden vlak bij 2 kun je wel invullen:  $f(2,001) = 6001$  en  $f(2,0001) = 60001$ , enzovoort. Verder is  $f(1,999) = 5999$  en  $f(1,9999) = 59999$ .

De grafiek van  $f$  komt steeds dichters langs de lijn  $x=2$  te lopen.  $x=2$  is de vergelijking van de verticale asymptoot.

Voor de horizontale asymptoot ga je anders te werk. Kies  $x$ -waarden als 1000, 10000, 100000, enzovoort. Bereken de bijbehorende functiewaarden. Doe hetzelfde met -1000, -10000, -100000, enzovoort. Je ziet dan dat de functiewaarden steeds dichters in de buurt van  $y=1$  liggen. Hoe verder je van 0 af zit, hoe beter die benadering. De lijn  $y=1$  is de horizontale asymptoot van de grafiek van  $f$ . Het domein van  $f$  is:  $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ . Het bereik van  $f$  is:  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ .

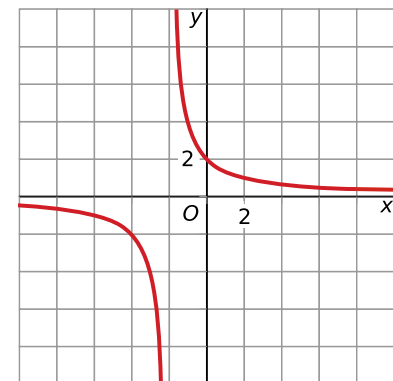


Figuur 4

### Opgave 2

Je ziet de grafiek van de functie  $f$  met  $f(x) = \frac{4}{x+2}$ .

- Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek?
- Welk getal naderen de functiewaarden als  $x$  heel groot wordt?
- Welk getal naderen de functiewaarden als  $x$  heel klein wordt?
- Wat is de vergelijking van de horizontale asymptoot?
- Geef het domein en bereik van  $f$ .



Figuur 5

### Opgave 3

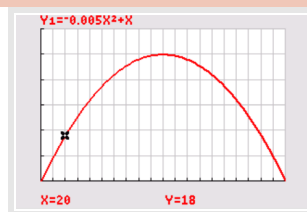
Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = \frac{4}{x} + 2$ .

- Maak de grafiek van  $f$  met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.
- Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Hoe zie je dat aan de tabel van  $f$ ?
- Welk getal naderen de functiewaarden als  $x$  heel groot wordt?
- Welk getal naderen de functiewaarden als  $x$  heel groot wordt in de negatieve richting?
- Wat is de vergelijking van de horizontale asymptoot?
- Geef het domein en bereik van  $f$ .

## Voorbeeld 2

### Bekijk de applet

Speelt de luchtweerstand geen rol, dan is de baan van een afgeschoten voorwerp  $P$  een zuivere parabool. Bijvoorbeeld  $h(x) = -0,005x^2 + x$ . Hierin is  $x$  de horizontale afstand die het voorwerp heeft afgelegd (in meter) en  $h$  de bijbehorende hoogte boven de grond (in meter). In de grafiek kun je zien hoe hoog het voorwerp maximaal komt. Bereken bij welke afstand de hoogte maximaal is en bereken hoe hoog het voorwerp maximaal komt.



Figuur 6

Antwoord

Bepaal eerst de nulpunten door  $h(x) = 0$  op te lossen. Door ontbinding in factoren vind je  $x(-0,005x + 1) = 0$  en dit geeft  $x = 0 \vee x = 200$ .

Omdat een parabool symmetrisch is, zit het maximum bij  $x = 100$ . De hoogte is dus maximaal bij 100 meter. En omdat  $h(100) = 50$  komt het voorwerp maximaal 50 meter hoog.

### Opgave 4

In **Voorbeeld 2** gaat het over een parabolische baan met functievoorschrift  $h(x) = -0,005x^2 + x$ .

- Als je de grafiek met de grafische rekenmachine wilt maken, zijn de standaardinstellingen van het venster niet geschikt. Waarom niet?
- Om het hoogste punt te kunnen bepalen, moet je de grafiek goed in beeld hebben. Waarom bereken je nu eerst de nulpunten?
- Maak vervolgens met de grafische rekenmachine een geschikte tabel om te bekijken welke functiewaarden er allemaal voorkomen.
- Bij welke vensterinstellingen komt de hele baan in beeld?

### Opgave 5

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = 100x(x - 10)(x - 20)^2$ .

- Welke nulpunten heeft  $f$ ?
- Waarom heeft de grafiek van  $f$  geen verticale asymptoot?  
Je kunt de  $x$ -waarden van het venster instellen, de nulpunten moeten zichtbaar worden en asymptoten zijn er niet. Met de tabel bekijk je de grootte van de functiewaarden.
- Welke vensterinstellingen laten alle karakteristieken zien?
- Bepaal de extremen van deze functie in gehele getallen nauwkeurig.
- Welk bereik heeft deze functie?

## Voorbeeld 3

Dit is een grafiek van de functie  $f(x) = \frac{4x^2 - 16}{x^2 - 100}$ .

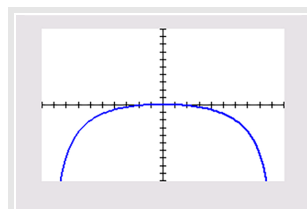
Hij is gemaakt met de grafische rekenmachine met het standaardvenster.

Bepaal alle karakteristieken en het bereik van  $f$ .

Antwoord

Op grond van dit plaatje zou je heel verkeerde conclusies kunnen trekken.

Bijvoorbeeld dat het maximum  $f(0) = 0$  is. En dat de grafiek een soort van afgeplatte bergparabool is. En dat is niet goed.



Figuur 7

Eerst kijk je of er nulpunten en asymptoten zijn:

- $f(x) = 0$  levert op:  $\frac{4x^2-16}{x^2-100} = 0$  en dus:  $4x^2 - 16 = 0$ .

Er zijn daarom precies twee nulpunten  $x = -2$  en  $x = 2$ .

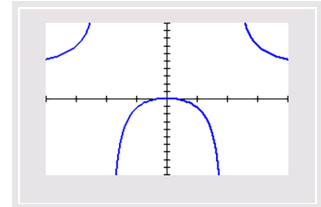
- Je deelt door  $x^2 - 100$  en dus ontstaan er problemen als  $x^2 - 100 = 0$ .

Dit betekent dat  $x = 10$  en  $x = -10$  wellicht verticale asymptoten zijn. Door getallen in de buurt van 10 dan wel -10 in te vullen, merk je dat dit echt twee verticale asymptoten zijn.

- Als de grote getallen (of grote, negatieve getallen) invult naderen de functiewaarden naar 4. Dus  $y = 4$  is de horizontale asymptoot.

Pas nu de vensterinstellingen aan en breng alle karakteristieken van de grafiek in beeld. Bij  $x = 10$  blijkt een maximum te zitten:  $f(0) = 0,16$ . (Laat je rekenmachine een maximum zoeken tussen bijvoorbeeld de nulpunten.)

Het bereik van  $f$  lees je uit de grafiek af, rekening houdend met het maximum en de horizontale asymptoot:  $B_f = \langle \leftarrow; 0,16 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$ .



Figuur 8

### Opgave 6

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = \frac{2x^2+4}{x^2-16}$ .

- Plot de grafiek en geef de juiste vensterinstellingen.
- Geef de karakteristieken van  $f$ .
- Geef  $D_f$  en  $B_f$ .

### Opgave 7

Gegeven is de functie  $g$  met  $g(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ .

- Waarom heeft deze functie geen verticale asymptoot?
- Welk nulpunt heeft functie  $g$ ?
- Onderzoek of  $g$  een horizontale asymptoot heeft.
- Geef het domein en bereik van  $g$ .

## Verwerken

### Opgave 8

Geef het domein, het bereik en de asymptoten van de volgende functies.

- $f(x) = 4 - \frac{4}{x}$
- $g(x) = \frac{4-x}{x}$
- $h(x) = \frac{x}{x^2-4}$
- $k(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

### Opgave 9

Een voorwerp wordt vanaf de grond weggeschoten. De hoogte  $h$  van het voorwerp wordt beschreven door  $h(x) = -0,1x^2 + 8x$ , waarbij  $x$  de horizontale afgelegde afstand in meter van het voorwerp is. Bereken algebraïsch de maximale hoogte van het voorwerp.

### Opgave 10

De toonhoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte wordt. De frequentie wordt uitgedrukt in Hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie  $f$  dan kun je de golflengte  $W$  (in meter) berekenen:  $W = \frac{330}{f}$ . Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.

- Als je  $[15, 30000]$  als domein kiest, welk bereik heeft  $W$  dan?
- Vleermuizen kunnen hoogfrequente geluiden horen, soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz. Is dit een hoog of juist laag geluid?
- Welke golflengte heeft dat geluid?
- Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen?
- Welke golflengte heeft zo'n geluid?
- Welke waarde benadert  $W$  als  $f$  heel groot wordt?

### Opgave 11

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = \frac{10x}{(x-20)^2}$ .

- Bereken de nulpunt(en) van deze functie.
- Welke asymptoten heeft deze functie?
- Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van  $f$  goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?
- Bepaal het bereik van  $f$ .

### Opgave 12

Voor de totale kosten ( $TK$ ) bij de productie van een bepaald artikel geldt:  
 $TK = 100 + 0,1q^2$  waarin  $q$  het aantal exemplaren voorstelt.

- Bereken de gemiddelde kosten per exemplaar bij een productie van 120 stuks in twee decimalen nauwkeurig.
- Leg uit waarom de gemiddelde kosten het hellingsgetal zijn van de lijn door de punten  $(0,0)$  en  $(q, TK)$ .
- Stel een voorschrift op voor de gemiddelde kosten per exemplaar ( $GK$ ) als functie van  $q$ .
- Welke asymptoot heeft de functie  $GK$ ? Schrijf het domein en het bereik van  $GK$  op.

## Toepassen

### Opgave 13: Overlevingstijd

Als iemand in koud water terechtkomt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot  $30^\circ\text{C}$  ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van  $30^\circ\text{C}$  wordt de overlevingstijd genoemd.

Bij de vragen wordt uitgegaan van een persoon die te water is geraakt in gewone kleding en met een reddingsvest. In deze situatie geldt de volgende formule:

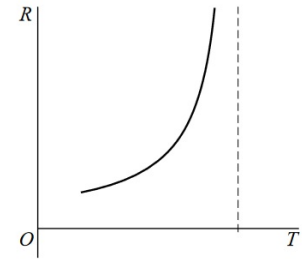
$$R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T} \text{ met } R > 0 \text{ en } T \geq 5,0$$

Hierin is  $R$  de overlevingstijd in minuten en  $T$  de watertemperatuur in  $^\circ\text{C}$ .

- Bij een watertemperatuur van  $20^\circ\text{C}$  is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van  $10^\circ\text{C}$ . Bereken hoeveel keer zo groot.

- b** Bereken de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd 5,0 uur is. Rond daarna je antwoord af op een geheel aantal graden.
- c** Hier zie je de grafiek van  $T$  als functie van  $R$ . Bepaal de waarde van  $T$  die bij de verticale asymptoot hoort en leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.

(naar: examen wiskunde havo B in 2011, eerste tijdvak)



Figuur 9

### Opgave 14: Zuurstofgehalte

Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte in de lucht tijdelijk af. De technische staf heeft het verloop van het zuurstofgehalte beschreven met de formule:

$$Z(t) = 200 \left( 1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{t+10^2} \right)$$

Hierin is  $t$  de tijd in minuten gerekend vanaf het moment dat de storing begon. Verder is  $Z$  het aantal  $\text{cm}^3$  zuurstof per liter lucht op het tijdstip  $t$ . Op  $t = 0$  is het zuurstofgehalte normaal.

- a** Bereken  $Z(0)$ .
- b** Welke asymptoten heeft de grafiek van  $Z(t)$ ? Welke betekenis hebben ze?
- c** Op welk tijdstip is het zuurstofgehalte minimaal?
- d** De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau nog juist toelaatbaar. Bereken gedurende hoeveel minuten het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.

## Testen

### Opgave 15

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = \frac{4+2x}{x-1}$ .

- a** Bereken  $f(100)$  en  $f(-100)$  in vier decimalen nauwkeurig.
- b** Bereken het nulpunt van  $f$ .
- c** Breng de grafiek van  $f$  in beeld.
- d** Schrijf de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van  $f$  op.
- e** Geef het domein en bereik van  $f$ .

### Opgave 16

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = \frac{x^2}{x^4+10}$ .

- a** Bereken het nulpunt van deze functie.
- b** Welke asymptoten heeft deze functie?
- c** Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van  $f$  goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?
- d** Bepaal het bereik van  $f$ . (Benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.)

### Opgave 17

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is een verband tussen temperatuur en kiemtijd gebleken. De kiemtijd  $K$  is geteld in dagen en de temperatuur  $T$  is gemeten in °C. Dit verband wordt gegeven door:  $K = \frac{89}{T-2}$ .

- a** Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen 10 dagen ontkiemd?
- b** Wat is een zinvol domein voor  $K$  als functie van  $T$ ?
- c** Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?
- d** Welk bereik hoort bij het gekozen domein?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

