

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Werken met formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- formule — variabele — grootte — eenheid
- herschrijven — uitdrukken in — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren
- functie
- vergelijking — vergelijking oplossen — balansmethode — terugrekenen — inklemmen

Activiteitenlijst

- soorten formules herkennen — grafieken maken bij verbanden tussen twee variabelen
- formules herleiden — de éne variabele uitdrukken in de andere — formules combineren
- formules invoeren in de grafische rekenmachine en grafieken erbij maken
- vergelijkingen oplossen met alle bekende methoden

Achtergronden

Het gebruik van formules is een betrekkelijk recente 'uitvinding'. De Franse amateurwiskundige **François Viète (1540 - 1603)** was de eerste die een systematische symbolische notatie voor algebraïsche problemen bedacht. Hij gebruikte letters voor onbekenden: klinkers voor variabelen en medeklinkers voor constanten (die hij als eerste coëfficiënten noemde). Zijn bijdrage aan de theorie van het oplossen van vergelijkingen is mede daardoor heel groot, want voor die tijd moesten alle oplossingsmethoden in woorden worden omschreven...

Al eerder had de theoloog **Nicole d'Oresme (1323 - 1382)** voor zijn natuurkundige onderzoeken de grafiek uitgevonden. Maar pas nadat **René Descartes (1596 - 1650)** de beschrijving van rechte en kromme lijnen met behulp van formules bedacht, werd het gebruik van grafieken zoals wij die tegenwoordig kennen langzamerhand gemeengoed. Descartes gebruikte voor variabelen letters achterin het alfabet (vaak x , y en z) en voor constanten letters voor in het alfabet. Dat doen wiskundigen tegenwoordig nog steeds... Daarom weet je dat de formule $y = ax + b$ een (lineair) verband beschrijft tussen x en y , waarin a en b constanten zijn.



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Los de vergelijking $x^2 + \sqrt{2x} = 20$ op met behulp van de grafische rekenmachine. Rond af op drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen nauwkeurig.

- a $610 + 0,2q = 55 - 0,3q$
- b $2 - 8(x - 2) = 4 + 3(4 - x)$
- c $4 \cdot t^3 = 16$
- d $-0,15 \cdot (x + 25)^2 + 15 = 0$

Opgave 3

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h = 100 + 40t - 5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

- Breng de grafiek van h in beeld op de grafische rekenmachine.
- Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten?
- Na hoeveel seconden was de vuurpijl weer op diezelfde hoogte?
- Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan? Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?
- Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?
- Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem. Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton. Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

- De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijde van het grondvlak met x , beide in cm. Laat zien dat het verband tussen h en x beschreven wordt door de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.
- De verpakkingsmachine laat een maximale hoogte van 12 cm toe. Bepaal de waarde van x bij $h = 12$. Geef de benadering in mm nauwkeurig.
- Herleid de formule $4xh + 2x^2 = 800$ tot h een functie is van x en bereken welke h bij $x = 8$ hoort.

Opgave 5

Men gaat er vaak vanuit dat de geluidssnelheid in lucht 340 meter per seconde is. Dat is niet helemaal waar. In werkelijkheid hangt de snelheid van het geluid af van de temperatuur. Bij windstil weer wordt het verband bij benadering weergegeven door de volgende formule:

$$V = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$$

Hierbij is V de snelheid van het geluid in meter per seconde bij een temperatuur van T graden Celsius.

In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van $-27,4^\circ\text{C}$ tot $38,6^\circ\text{C}$. De laagste temperatuur van $-27,4^\circ\text{C}$ werd op 27 januari 1942 in Winterswijk gemeten. De hoogste temperatuur van $38,6^\circ\text{C}$ werd op 23 augustus 1944 in Warnsveld bereikt.

Neem aan dat de temperaturen gemeten zijn bij windstil weer.

- Bereken het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen.

Ga bij de volgende vragen steeds van een temperatuur van 15°C op 0 km hoogte uit.

In de atmosfeer neemt de temperatuur tot op 10 km hoogte lineair af tot -50°C volgens de formule $T = 15 - 6,5h$. Hierbij is h de hoogte in kilometer.

Als deze gecombineerd wordt met de formule $V = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ kan worden afgeleid dat voor het verband tussen V en h bij benadering de volgende formule geldt:

$$V = 331\sqrt{1,0549 - 0,0238h}$$

- Leid deze formule af.

Een grote afstand, zoals bijvoorbeeld Amsterdam - Toronto, moet met een passagiersvliegtuig snel afgelegd kunnen worden. Dat kan alleen als het vliegtuig hoog vliegt omdat dan de luchtweerstand klein is. Voor passagiersvliegtuigen zoals de Boeing 747 mag de snelheid echter hoogstens 90% van de geluidssnelheid zijn.

- Een Boeing 747 wil een snelheid maken van 975 km per uur (270,8 m/s). Bereken tot op welke hoogte dit vliegtuig kan vliegen. Geef het antwoord in kilometers afgerond op één decimaal.

(bron: examen havo wiskunde B in 2004, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 6: Koolmonoxide

Koolmonoxide (CO) is één van de stoffen die via de uitlaat van een auto de lucht inkomt. De hoeveelheid CO die uitgestoten wordt is afhankelijk van de temperatuur van de motor en van de rij-snelheid. Voor de CO-uitstoot bij de warme motor geldt: $u = 4,4 + \frac{196,0}{v}$. Bij een koude motor geldt:

$u = 6,9 + \frac{298,5}{v}$. Hierin is u de uitstoot in gram per kilometer en v de snelheid in kilometer per uur.

- Hoe kun je aan de formules zien dat de uitstoot afneemt als de snelheid toeneemt?
- De uitstoot van een koude motor bedroeg 14 g/km. Hoe hard reed deze auto?
- Iemand is geïnteresseerd in het verschil tussen de uitstoot bij een koude en bij een warme motor. Hij onderzoekt hoeveel procent de uitstoot bij een koude motor meer is dan bij een warme motor. Dat percentage hangt af van de snelheid. Hoe groot is dat percentage bij een snelheid van 30 kilometer per uur?
- Er bestaan ook formules waarbij de CO-uitstoot gegeven wordt afhankelijk van de ritlengte en de rijtijd. Voor een warme benzinemotor geldt: $u_{\text{tot}} = 4,4L + 0,054T$. Hierin is u_{tot} de totale hoeveelheid CO in gram uitgestoten tijdens de rit, L de ritlengte in kilometers en T de rijtijd in seconden. Laat zien hoe deze formule kan ontstaan uit de eerste formule voor de CO-uitstoot bij een warme motor.

Opgave 7: Windmolens

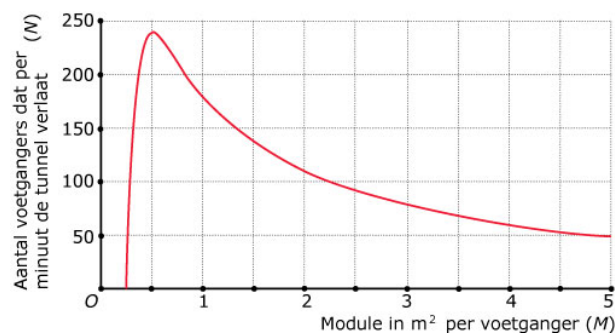
Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in m.

- Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 m. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?
- Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan nog berekenen. Stel een formule op die D uitdrukt in v .
- In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Examen

Opgave 8: Treinreizigers te U.

Treinreizigers die op het station te U. uitstappen, kunnen de uitgang van het station alleen bereiken via een voetgangerstunnel. De tunnel is 30 meter lang en 3 meter breed. De snelheid van de voetgangersstroom in de tunnel is afhankelijk van de drukte. Een maat voor de drukte is de module, dat is het gemiddelde aantal vierkante meter per voetganger.



Figuur 2

- Op zeker moment bevinden zich 120 mensen in de tunnel, die allen in de richting van de uitgang lopen. Bereken voor deze situatie de module.

Het verband tussen de snelheid van de voetgangersstroom V en de module M wordt gegeven door de formule $V = 87 - \frac{26}{M+0,05}$ met V in meter per minuut en M in m^2 per voetganger.

- b** Bereken de module bij een snelheid van 50 m per minuut. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- c** Wanneer een voetganger ongehinderd kan lopen, is zijn snelheid ongeveer 5 km/h. Onderzoek of dat in overeenstemming is met de formule.
- d** Er bestaat een verband tussen de waarde van M en het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat (N). Het verband tussen M en N staat grafisch weergegeven in de figuur. Schat zo nauwkeurig mogelijk hoeveel mensen er per minuut de tunnel verlaten in het geval dat de snelheid van de voetgangersstroom 70 m per minuut is.
- e** Een belangrijk gegeven bij het ontwerpen van een tunnel is het maximale aantal mensen dat in korte tijd kan worden verwerkt. Bij welke snelheid is het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat maximaal? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1989, tweede tijdvak)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
