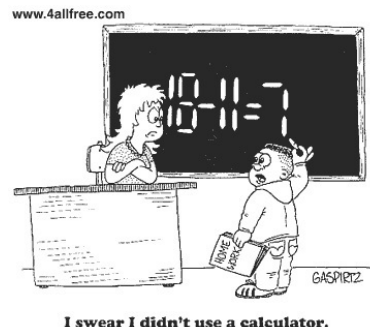


1.3 Formules en de grafische rekenmachine

Inleiding

De grafische rekenmachine kan heel snel grafieken maken bij formules die een verband tussen twee variabelen weergeven. Maar dan moeten ze wel in de juiste vorm staan: hij kan alleen werken met formules waarbij duidelijk is voor welke variabele getallen worden ingevuld (de invoervariabele) en welke variabele dan moet worden uitgerekend. Ook mogen er natuurlijk niet meerdere uitkomsten mogelijk zijn. Verbanden die aan deze eisen voldoen, noem je 'functies'. Het begrip functie wordt verder in 'Functies en grafieken' besproken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- formules herleiden tot ze de juiste vorm hebben voor de grafische rekenmachine;
- grafieken maken met de grafische rekenmachine;
- het begrip 'functie' kennen;
- formules combineren.

Voorkennis

- werken met variabelen (met letters);
- eenvoudige algebraïsche technieken, zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

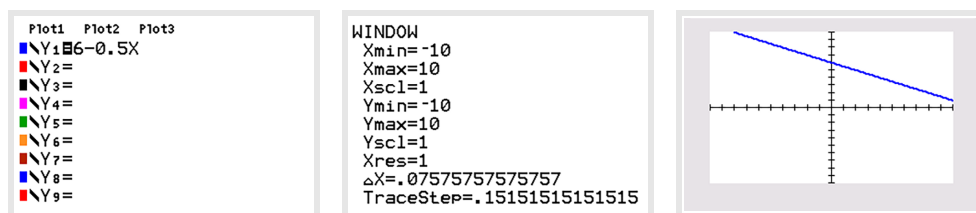
Als je nog nooit met een grafische rekenmachine hebt gewerkt, ga je nu eerst naar het **Practicum: Basistechnieken GR** en doe je het practicum dat bij jouw rekenmachine hoort.

Uitleg

De formule $x + 2y = 12$ beschrijft een verband tussen x en y . Je wilt bij deze formule met de grafische rekenmachine de bijpassende grafiek tekenen. Dan moet y worden uitgedrukt in x .

$$\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 2y &= 12 - x && \text{beide zijden } -x \\ y &= 6 - 0,5x && \text{beide zijden } /2 \end{aligned}$$

Je hebt de variabele y geschreven als functie van x . Nu kun je de formule in de grafische rekenmachine invoeren. In het practicum leer je de eerste beginselen van het werken met de grafische rekenmachine.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven zijn de twee formules $2x + y = 6$ en $x^2 + 2y = 12$.

- Herleid beide formules tot y is uitgedrukt in x .
- Voer beide formules in de grafische rekenmachine in.
- Bepaal met de grafische rekenmachine de snijpunten van beide grafieken.
- Doe dit ook door de bijpassende vergelijking op te lossen zonder hulp van de grafische rekenmachine.

Opgave 2

Druk in de formules y uit in x .

- $x - y = 12$
- $2x + 5y = 4$
- $2(x + y) = 6$
- $32x = 2y^2$

Theorie en voorbeelden

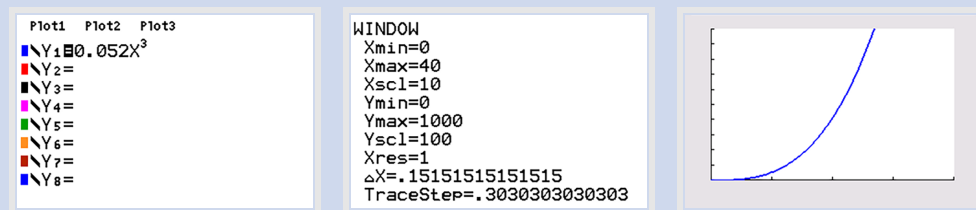
Om te onthouden

Bij een formule die het verband tussen de variabelen x en y beschrijft, noem je y een **functie** van x , wanneer deze formule de vorm $y = \dots$ heeft. In de bijbehorende grafiek komt y dan altijd op de verticale as.

- In de formule $y = x^2 + 4$ is y een functie van x .
- In de formule $P = 0,052v^3$ is P een functie van v .
- De formule $a + 2b = 6$ kun je op twee manieren schrijven:
 - $a = 6 - 2b$, met a als functie van b ;
 - $b = 3 - 0,5a$, met b als functie van a .

Formules met twee variabelen van de vorm $y = \dots$ kun je in de grafische rekenmachine invoeren. Hoe je dat doet, vind je in het practicum.

Hier zie je bijvoorbeeld de grafiek van de functie $y = 0,052x^3$. Het maken van de grafiek van een functie op de grafische rekenmachine wordt **plotten** genoemd.



Figuur 3

Voorbeeld 1

Een kogel wordt omhoog geschoten. Voor de hoogte h in meter na t in seconden geldt de formule $h = -6t^2 + 48t + 0,5$.

Plot de grafiek van h en bepaal hoe hoog de kogel maximaal komt.

Antwoord

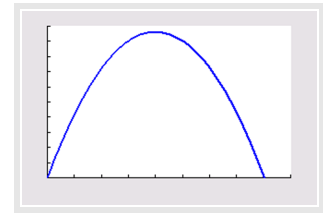
Je voert in de grafische rekenmachine de formule in als $Y1 = -6X^2 + 48X + 0.5$.

Welke vensterinstellingen zijn nu geschikt?

Uit de gegevens volgt dat t begint bij $t = 0$, dus x is minimaal 0. Verder weet je dat $h \geq 0$, dus y is ook minimaal 0.

Vervolgens kijk je naar de tabel die de grafische rekenmachine van deze functie heeft gemaakt. Je bekijkt hoe lang de waarden van y positief zijn. Dan zie je dat je voor x maximaal 9 moet kiezen. De grootste waarde voor y die je tegenkomt, ligt nog onder de 100, dus dat kies je als maximale waarde voor y .

In de tabel zie je dat er bij $t = 4$ een maximum is van $h = 96,5$. Dus de maximale hoogte van de kogel is 96,5 m.



Figuur 4

Opgave 3

Een kogel wordt omhoog geschoten. Voor de hoogte h in meter na t in seconden geldt de formule $h = -5t^2 + 60t + 1,5$.

Plot de grafiek van h en bepaal hoe hoog de kogel maximaal komt.

Opgave 4

Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 250,00, waarbij nog een bedrag van € 0,06 per kopie komt. Op school staat zo'n apparaat speciaal voor gebruik door leerlingen. Zij betalen € 0,10 per kopie.

- Geef een formule voor de prijs per kopie (P) als functie van het aantal kopieën (a).
- Maak de grafiek van P op de grafische rekenmachine. Welke vensterinstellingen zijn geschikt?
- Bij welke waarde van a maakt de school winst?

Voorbeeld 2

Als je 360 meter afrastering beschikbaar hebt voor een rechthoekig veld met een oppervlakte van 0,5 ha, dan geldt:

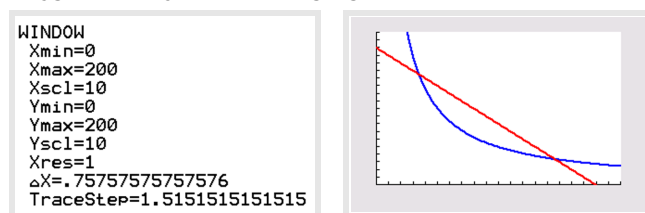
$$l \cdot b = 5000 \text{ en } 2l + 2b = 360$$

Hierin is l de lengte in meter en b de breedte in meter van de rechthoek. Zoek nu waarden voor l en b die aan beide formules voldoen.

Antwoord

Schrijf de formules als: $l = \frac{5000}{b}$ en $l = 180 - b$.

Voer ze in de grafische rekenmachine in als $Y1=5000/X$ en $Y2=180-X$. Om een goede grafiek te krijgen, kies je verstandige grenzen van de waarden van x (de breedte) en y (de lengte).



Figuur 5

Je ziet dat de grafieken twee snijpunten hebben. Om die snijpunten gaat het. Je kunt ze bepalen door een tabel te maken met de grafische rekenmachine.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Bepaal met de grafische rekenmachine de twee snijpunten uit het voorbeeld op gehele getallen nauwkeurig. Welke waarden voor l en b voldoen aan beide formules?

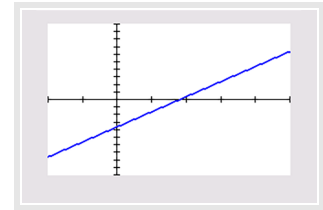
Voorbeeld 3

Gegeven is de formule $K = 4a + 8b - 12$ en de formule $b = 2a - 3$. Combineer de twee formules en druk K uit in a .

Plot daarna de grafiek bij de formule.

Antwoord

Als je de tweede formule in de eerste formule voegt, dan krijg je $K = 4a + 8(2a - 3) - 12 = 4a + 16a - 24 - 12 = 20a - 36$. Nu heb je K uitgedrukt in a en bij deze formule kun je een grafiek tekenen.



Figuur 6

Opgave 6

- Gegeven zijn de formules $R = 2p + 3q + 20$ en $q = 2p - 3$. Druk R uit in p .
- Gegeven zijn de formules $K = -2t - 5v + 22$ en $t = -v - 3$. Druk K uit in v .
- Gegeven zijn de formules $2z = 3x - 4y$ en $z = 2x + 1$. Deze twee formules kun je combineren tot de vorm $y = ax + b$. Welke getallen zijn a en b ?
- Gegeven is de formule $Z = \frac{12x+18}{3y}$. Neem $Z = 2$ en druk y uit in x .

Voorbeeld 4

Een boer wil een rechthoekig stuk land van 200 m^2 omheinen. De kosten voor de omheining moeten zo laag mogelijk worden. Hij moet de lengte en de breedte dus zo kiezen dat de omtrek zo klein mogelijk wordt. Hoeveel meter omheining is in dit geval nodig?

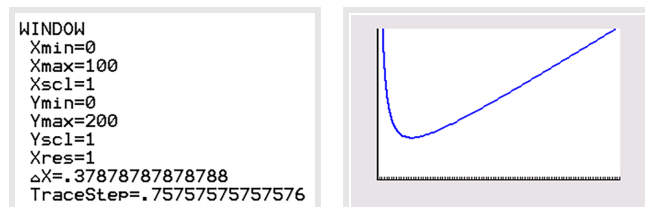
Antwoord

Er gelden voor zo'n rechthoek twee formules: $A = l \cdot b$ en $P = 2l + 2b$ als l de lengte (in meter), b de breedte (in meter), A de oppervlakte en P de omtrek is.

Omdat $A = 200$, geldt: $l \cdot b = 200$ en dus $l = \frac{200}{b}$.

Die uitdrukking kun je invullen in de formule voor de omtrek: $P = \frac{400}{b} + 2b$.

Deze formule geeft een verband tussen P en b waarmee je een grafiek kunt maken. Je voert dan de formule in de grafische rekenmachine in en je kiest verstandige waarden voor de instelling van het grafiekenvenster. Aan de grafiek kun je zien dat er een waarde van l is, waarbij de omtrek zo klein mogelijk is. Die waarde is ongeveer 14,1 meter en de bijbehorende breedte is hetzelfde. Kennelijk is een vierkant landje het gunstigst.



Figuur 7

Opgave 7

Bekijk [Voorbeeld 4](#). Boer Voortman zet voor zijn paard een weilandje af. Hij heeft daarvoor nog 200 meter gaas. Het weiland wordt zuiver rechthoekig. Omdat het weiland tegen een brede rivier aan komt te liggen, hoeft hij alleen bij de twee breedtes en de lengte een hek te plaatsen.

- Druk de lengte l van het weiland uit in de breedte b .
- Druk de oppervlakte A van het weiland uit in b .

- c Breng met de grafische rekenmachine de grafiek bij de formule die je in b hebt gevonden in beeld. Bedenk van tevoren de beste vensterinstellingen.
- d Voor welke waarden van b is de oppervlakte van het weiland zo groot mogelijk?

Verwerken

Opgave 8

Breng van de formules de grafieken in beeld op de grafische rekenmachine. Denk om het gebruik van haakjes en de instellingen van het venster.

- a $s = 250t - 4,9t^2$
- b $k = 0,04 + \frac{200}{a}$, met $a > 0$
- c $y = 3 + \sqrt{x - 2}$
- d $N = \frac{60}{30 + 0,5a^2}$

Opgave 9

Gegeven is de formule $4xy + 2x^2 = 100$. Herleid de formule eerst naar de vorm $y = \dots$ en plot daarna de grafiek.

Opgave 10

Gegeven zijn de formules $r = s - 3$ en $t = -s^2 + 3r$.

- a Druk t uit in s .
- b Bepaal met behulp van de grafische rekenmachine voor welke waarde van s , t zo groot mogelijk is.

Opgave 11

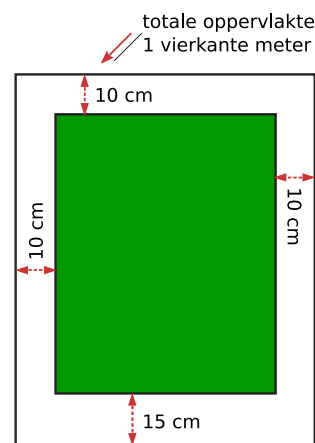
Voor een kopieerapparaat bedraagt de maandelijkse huur € 200,00 waarbij nog een bedrag van 4 eurocent per kopie komt. K stelt de totale kosten voor en a is het aantal kopieën dat er maandelijks (gemiddeld) wordt gemaakt.

- a Schrijf de formule op voor K als functie van a .
- b Iemand die een kopie maakt, betaalt 10 eurocent per kopie. Schrijf de formule op voor de inkomsten I als functie van a .
- c Hoeveel kopieën moeten er per maand worden gemaakt als 10 eurocent per kopie kostendekkend is?

Opgave 12

Stel je voor dat een bedrijf affiches wil maken. Om op te vallen moet de oppervlakte van zo'n affiche 1 m^2 worden. Het affiche wordt zo bedrukt, dat er aan de beide zijanten en de bovenkant een witte strook van 10 cm overblijft. Aan de onderkant is die strook 15 cm. De bedrijfsleiding vraagt zich af welke afmetingen het affiche nu nog kan hebben. Men komt daarbij op de formule: $(l + 25)(b + 20) = 10000$.

- a Laat zien hoe men aan deze formule komt en wat l en b betekenen.
- b Breng de grafiek bij deze formule in beeld.
- c Bij nader inzien wil de bedrijfsleiding dat het bedrukte deel een vierkant wordt. Welke maat voor de affiches adviseer je nu?

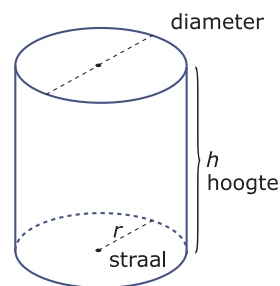


Figuur 8

Opgave 13

Voor de inhoud van een cilindervormig blikje geldt: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Hierin is V de inhoud (het volume) in cm^3 , r de straal in centimeters en h de hoogte in centimeters.

- Neem een blikje waarvoor $h = 10$ cm. Nu is V een functie van r . Breng de grafiek van deze functie zo in beeld dat je bij $V = 1000$ nog kunt aflezen hoe groot r is. Bepaal de waarde van r op twee decimalen nauwkeurig.
- Voor een blikje waarvan de diameter en de hoogte gelijk zijn, geldt: $h = 2r$. Schrijf een formule op voor V als functie van r . Bepaal nu de waarde van r van zo'n blikje als de inhoud 0,5 liter is.
- Voor een blikje waarvan de inhoud 1 liter is, kun je een formule opstellen voor h afhankelijk van r . Breng de bijbehorende grafiek in beeld en bepaal de waarde van h waarvoor $r = 5$.



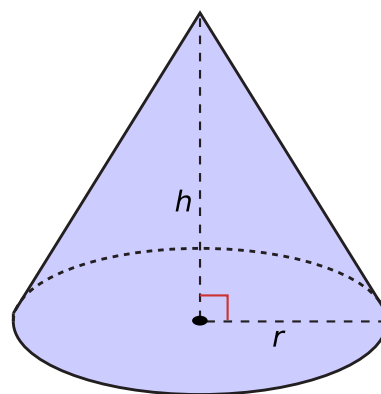
Figuur 9

Toepassen

Opgave 14: Een rechte kegel

Voor de inhoud van een rechte kegel geldt: $V = \frac{1}{3}Gh$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Dit grondvlak is een cirkel met straal r .

- Welke formule beschrijft het verband tussen V , r en h ?
Voor een kegel met een inhoud van 1 liter kun je uit de formules een verband afleiden tussen r en h .
- Geef dat verband in een formule weer zo, dat r een functie is van h en dat r en h in cm zijn.
- Bepaal nu de waarde van h waarvoor geldt: $r = 10$ cm. Benader het antwoord op twee decimalen nauwkeurig.
- Bepaal de waarde van r waarvoor geldt: $h = 10$ cm. Benader het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 10

Opgave 15: Doos inpakken

In deze opgave wordt een balkvormige doos in een rechthoekig vel papier ingepakt. De hoogte van de doos is h , de breedte b en de lengte l . Alle maten zijn in centimeters. Er geldt $h \leq b \leq l$. Het papier wordt eerst strak in de lengterichting om de doos gevouwen. Het papier is zo lang dat twee randen ervan precies tegen elkaar aan komen aan de bovenkant van de doos. De lengte van het papier in centimeters is dus $2l + 2h$. Vervolgens wordt het papier aan de voor- en achterkant strak tegen de doos aan gevouwen. Het papier is zo breed dat de randen van het papier precies tegen elkaar aan komen. De breedte van het papier in centimeters is dus $b + h$. De oppervlakte van het papier in cm^2 is O .

foto 1



foto 2



foto 3



Figuur 11

- Druk O uit in b , l en h . Werk de haakjes weg.

Iemand vraagt zich af hoe groot de maximale inhoud van een balkvormige doos is als je deze op de beschreven manier in een stuk cadeaupapier van 120 cm bij 50 cm zou verpakken. Als de doos op deze manier wordt ingepakt, geldt:

$$2l + 2h = 120 \text{ en } b + h = 50.$$

Met behulp van de gegevens is de inhoud I in cm^3 uit te drukken in de breedte b . Er geldt: $I = b(b + 10)(50 - b)$.

- b** Toon dit aan.
Er is een waarde van b waarvoor I maximaal is.
- c** Bepaal de maximale inhoud van een balkvormige doos die met dit stuk papier ingepakt kan worden. Geef je antwoord in cm^3 nauwkeurig.

(naar: examen havo wiskunde B in 2013, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 16

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die bij een bepaalde temperatuur nodig is om 50% van het zaad van een plant te laten ontkiemen. Proefondervindelijk werd dit verband tussen de tijd in dagen en de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ (graden Celsius) gevonden: $tijd = \frac{89}{T-2}$. Hierin is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.

- a** Voor welke temperaturen heeft de formule betekenis?
- b** Maak een grafiek bij deze formule. Schrijf de instellingen van het venster op.
- c** Bij welke temperatuur duurt het 5 dagen totdat 50% van het zaad is ontkiemd?

Opgave 17

Van een vierkant stuk papier van 20 cm bij 20 cm wordt een bakje gemaakt door uit de hoeken een vierkantje weg te knippen. De randen die ontstaan, worden naar boven gevouwen. Stel, zo'n geknipt vierkantje heeft een zijde van x cm.

- a** Stel een formule op voor de breedte b van het bakje als functie van x .
- b** Welke waarden kunnen x en b aannemen?
- c** Maak een formule voor de inhoud I als functie van x .
- d** Maak een grafiek van de formule voor I . Let op de waarden die x kan aannemen en zorg voor een zodanige grafiek dat alle mogelijke waarden van I in beeld komen.
- e** Bepaal voor welke waarde van x de inhoud maximaal is.

Practicum: Grafische rekenmachine

Met een **grafische rekenmachine** moet je echt leren werken. Zo'n machine heeft veel mogelijkheden. Bij wiskunde B moet je er vrijwel alles van afweten uiteindelijk... Met de volgende practica leer je de basistechnieken.

- [Basistechnieken TI84](#)
- [Basistechnieken TIInspire](#)
- [Basistechnieken Casio fx-CG50](#)
- [Basistechnieken HPprime](#)
- [Basistechnieken NumWorks](#)

Grafieken kun je ook goed maken met **Excel**. Dat rekenbladprogramma zit tegenwoordig op bijna elke pc. Met de volgende practica leer je enkele basistechnieken.

- [Grafieken bij tabellen](#)
- [Formules en grafieken](#)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
