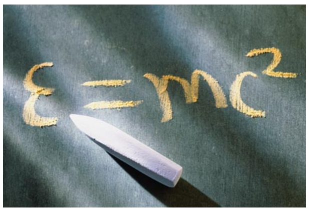
1.2 Formules herschrijven

Inleiding

Formules kun je vaak op verschillende manieren schrijven. Zo kun je de omtrek van een rechthoek uitleggen als: ‘tel lengte en breedte en lengte en breedte bij elkaar op’, maar ook als: ‘neem twee keer de lengte en twee keer de breedte en tel dat bij elkaar op’. Dan zeg je verschillende dingen, maar die leveren toch altijd dezelfde omtrek op. Het zijn gelijkwaardige formules (in woorden). Soms is de ene versie van de formule handiger, soms werk je liever met een andere.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- formules herleiden;
- haakjes wegwerken en ontbinden in factoren;
- werken met breuken.

Voorkennis

- werken met variabelen (met letters);
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

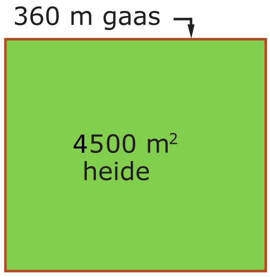
Iemand wil een stuk hei afgrenzen om er schapen te laten grazen met 360 meter gaas. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,45 hectare (dus 4500 m^2). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk hei.

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b.

a Stel bij dit probleem een formule op die past bij de gegeven omtrek en één die past bij de gegeven oppervlakte.

b Schrijf beide formules in de vorm $l = ...$

c Hoe kun je nu het probleem verder oplossen?



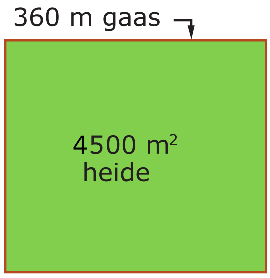
Figuur 2

Uitleg

Als een rechthoek met lengte l en breedte b een omtrek heeft van 360 m, dan geldt de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$.
Die formule kun je schrijven als $2l + 2b = 360$ en dan verder herleiden:

$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 360 && \text{beide zijden /2} \\ l + b &= 180 && \text{beide zijden - } b \\ l &= 180 - b \end{aligned}$$

Nu heb je l uitgedrukt in b. Zoiets doe je om grafieken te maken, l komt op de verticale as.



Figuur 3

Als deze rechthoek een oppervlakte van 4500 m^2 moet hebben, geldt ook $l \cdot b = 4500$.
En dit kun je herleiden:

$$\begin{aligned} l \cdot b &= 4500 && \text{beide zijden } /b \\ l &= \frac{4500}{b} \end{aligned}$$

Wil je nu weten voor welke b de rechthoek aan beide eisen voldoet, dan kun je met twee grafieken werken. Maar je kunt ook een vergelijking maken en die oplossen:

$$\begin{aligned} \frac{4500}{b} &= 180 - b && \text{beide zijden met } b \text{ vermenigvuldigen} \\ 4500 &= 180b - b^2 && \text{op 0 herleiden} \\ b^2 - 180b + 4500 &= 0 && \text{ontbinden in factoren} \\ (b-30)(b-150) &= 0 && \text{oplossingen opschrijven} \\ b &= 30 \vee b = 150 \end{aligned}$$

Je vindt dus twee mogelijke waarden voor de breedte van deze rechthoek.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ eenvoudiger kunt schrijven als $l + b = 180$. Schrijf de volgende formules zo eenvoudig mogelijk.

a $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - 6 \cdot y = 12$

b $2 \cdot x \cdot y + x \cdot y = 18$

c $y = 4x^2 + x + 3y - 7x + 2x^2$

d $2xy + xy - 3x = 18$

Opgave 2

Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ kunt schrijven in de vorm $l = 180 - b$. Herleid de volgende formules zodat y is uitgedrukt in x.

a $2x - 4y = 10$

b $-3x + 5 = 10 - 2y$

c $5x + 10xy = 20$

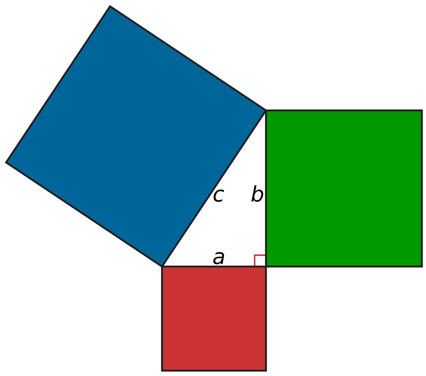
d $x \cdot (y + 2) = 6$

Opgave 3

In een rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras.
In formulevorm: $a^2 + b^2 = c^2$.

a Geef twee gelijkwaardige formules.

b Neem $a = 3x$ en $b = 4x$ en druk c uit in x.
Neem aan dat $x > 0$.



Figuur 4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Formules zoals $2l + 2b = 60$ kun je anders schrijven, zodat het overzichtelijker wordt. Je noemt dit **herleiden**. $2l + 2b = 60$ kun je bijvoorbeeld herleiden tot $l + b = 30$ of tot $b = 30 - l$. Deze formules beschrijven allemaal hetzelfde verband, maar zien er toch anders uit.

Bij het herleiden van formules maak je gebruik van:

- **haakjes wegwerken**:
  - $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
  - $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
- **ontbinden in factoren**:
  - $a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$
  - $x^2 + p \cdot x + q = (x + a) \cdot (x + b)$ met $a + b = p$ en $a \cdot b = q$ (de som-product-methode)
- **breuken optellen/aftrekken** en **breuken vermenigvuldigen/delen**:
  - $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$
  - $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$
  - $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
  - $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \Big/ \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ of $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

  Soms wordt ook de dubbele punt gebruikt om een deling aan te geven.
  Bij delen mogen de noemers nooit 0 zijn.

Voorbeeld 1

Voorbeelden van haakjes wegwerken:

- $-2(x - 3) = -2x + 6$
- $2 - (x - 5) = 2 - x + 5 = 7 - x$
- $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$
- $(x - 5)^2 = (x - 5)(x - 5) = x^2 - 5x - 5x + 25 = x^2 - 10x + 25$
  Dit kan ook sneller: $(x - 5)^2 = x^2 + 2 \cdot -5x + (-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

Let er wel op dat het wegwerken van haakjes geen automatisme wordt. Soms kun je met een formule juist veel eenvoudiger werken als je de haakjes gewoon laat staan. Als je bijvoorbeeld wilt weten voor welke x de uitdrukking $(x - 5)^2$ gelijk is aan 0, dan zie je meteen dat dat geldt voor $x = 5$. Bij de uitdrukking $x^2 - 10x + 25$ zie je dat een stuk minder snel.

Opgave 4

Werk de haakjes weg.

a $3x(x - 2)$

b $2a - (9a + 6)$

c $0{,}5p \cdot 100p - p(20p + 100)$

d $-5(x - 3)^2$

Opgave 5

Werk de haakjes weg.

a $-a(a + 1)$

b $(x + 2)(x + 4)$

c $2(a + 4)(a - 2)$

d $(5x - 4)^2$

Voorbeeld 2

Voorbeelden van ontbinden in factoren:

- $2x^2 + 6x = 2x(x+3)$
- $-x^2 + 4x = x(-x+4) = -x(x-4)$
- $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$
- $x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6)$ (Zie figuur.)
- $x^3 + 4x = x\left(x^2+4\right)$

	-12	
1	-12	
2	-6	← -4
3	-4	
-3	4	
-2	6	
-1	12	

Figuur 5

Opgave 6

Ontbind in factoren.

a $2x^2 + 10x$

b $-2x^2 + x$

c $3x^3 - 9x$

d $x^2 + 5x + 4$

e $a^2 - 9a + 8$

f $a^2 - 17a + 16$

Voorbeeld 3

Voorbeelden van de som en het verschil van breuken die als één breuk moeten worden geschreven (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt):

- $\frac{4}{x} + \frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot x} + \frac{x \cdot 3}{x \cdot 5} = \frac{20}{5x} + \frac{3x}{5x} = \frac{20+3x}{5x}$
- $\frac{2}{a} - 5 = \frac{2}{a} - \frac{5a}{a} = \frac{2-5a}{a}$
- $\frac{2}{3a} + \frac{5}{a^2} = \frac{2a}{3a^2} + \frac{15}{3a^2} = \frac{2a+15}{3a^2}$
- $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x(x+3)} - \frac{x}{x(x+3)} = \frac{x+6}{x(x+3)}$

Omgekeerd kun je breuken met variabelen soms herleiden door de variabele uit de breuk te halen.

- Goed: $\frac{x+6}{2} = \frac{x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}x + 3$
- Fout: $\frac{6}{x+2} = \frac{6}{x} + \frac{6}{2} = \frac{6}{x} + 3$

Opgave 7

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{x} + \frac{5}{x}$

b $\frac{-3}{a} - \frac{8}{a^2}$

c $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

d $\frac{2}{a} - \frac{3}{2a+1}$

Voorbeeld 4

Voorbeelden van breuken met variabelen vermenigvuldigen:

- $\frac{5}{3} \cdot \frac{x}{2} = \frac{5 \cdot x}{3 \cdot 2} = \frac{5x}{6}$
- $\frac{1}{x} \cdot \frac{5}{x+1} = \frac{5}{x(x+1)} = \frac{5}{x^2+x}$
- $\frac{4}{a} \cdot \frac{3-a}{2} = \frac{2 \cdot (3-a)}{a} = \frac{6-2a}{a}$
  Hier worden de 4 uit de teller van de eerste breuk en de 2 uit de noemer van de tweede breuk beide door 2 gedeeld vóórdat de vermenigvuldiging wordt ingezet.

Voorbeelden van breuken met variabelen delen:

- $\frac{5}{3} \Big/ \frac{2}{x} = \frac{5 \cdot x}{3 \cdot x} \Big/ \frac{2 \cdot 3}{x \cdot 3} = \frac{5 \cdot x}{2 \cdot 3} = \frac{5x}{6}$
- $\frac{1}{x} \Big/ \frac{x+1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{x \cdot 5} \Big/ \frac{(x+1) \cdot x}{5 \cdot x} = \frac{1 \cdot 5}{(x+1) \cdot x} = \frac{5}{x^2+x}$

Opgave 8

Schrijf als één breuk.

a $\frac{x}{7} \cdot \frac{2}{3}$

b $\frac{2}{7} \Big/ \frac{x}{3}$

c $\frac{2}{a} \cdot \frac{6}{5}$

d $\frac{4}{a} \Big/ \frac{5}{7}$

Opgave 9

Schrijf als één breuk.

a $\frac{x+1}{x} \cdot \frac{5}{x}$

b $\frac{x+1}{x} \Big/ \frac{3}{2x}$

c $\frac{a}{2a-1} \cdot \frac{a-1}{4}$

d $\frac{a}{3a-2} \Big/ \frac{a-2}{2}$

Verwerken

Opgave 10

Herleid.

a $4 \cdot x + 10 = 3 \cdot x - 2 \cdot y$

b $2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot x = 6 \cdot x^2$

c $4 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x^2 = 100$

d $W = p \cdot (650 - 2 \cdot p) - 20 \cdot (650 - 2 \cdot p)$

Opgave 11

Druk in de formules y uit in x. Schrijf de formules zo eenvoudig mogelijk.

a $x - 2y = 10$

b $(x + 2) \cdot y = 6$

c $x = 4 - y^2$

d $x \cdot y^2 = 4$

Opgave 12

Werk de haakjes weg en herleid.

a $-2x(x^2+6x)$

b $-2x-(x^2+6x)$

c $(a-3)(a+3)$

d $-x\left(2-\frac{3}{x}\right)$

e $\left(x-\frac{3}{x}\right)^2$

f $(x^2+1)(3x-2)$

Opgave 13

Ontbind in factoren.

a x^2-4x

b $-2t^2+18t$

c x^2+5x-6

d $p^2+4p-12$

e $4k^2-16$

f $16-p^2$

Opgave 14

Schrijf als één breuk.

a $\frac{3}{y}+\frac{5}{y}$

b $\frac{1}{4}+\frac{2}{x}$

c $\frac{2}{x}\Big/\frac{3}{x}$

d $2x-\frac{1}{2x}$

Toepassen

Opgave 15: Een boswal aanleggen

Een boer heeft een rechthoekig stuk land dat twee keer zo lang is als breed. Uit het oogpunt van landschapsbeheer haalt hij er aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af. Daar maakt hij een smalle boswal van.
Verder maakt hij aan een van de korte zijden een bredere boswal van 10 meter. Zijn land wordt daarmee in totaal 2690 m^2 kleiner.

a Maak eerst een tekening van de situatie. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (in meter). Hoe groot is de oppervlakte A (in m^2) voor de aanleg van de boswal, uitgedrukt in x?

b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal? Geef deze oppervlakte als formule met haakjes.

c Bereken door wegwerken van de haakjes hoe groot de breedte van het rechthoekige stuk land is.

Testen

Opgave 16

Schrijf deze formules zo, dat y is uitgedrukt in x.

a $x \cdot x + 4 \cdot y = 8 \cdot x^2 - 4 \cdot x$

b $2x \cdot y = 0{,}4x + 200$

c $x - 4y^2 = 2$

Opgave 17

Goed of fout? Verbeter de foute uitwerkingen of ontbindingen. Laat bij de goede uitwerkingen zien waarom ze goed zijn.

a $(x+3)^2 = x^2 + 9$

b $-x^2 - 4x + 12 = -(x-6)(x+2)$

c $\frac{8x+100}{4x^2} = \frac{2}{x} + \frac{25}{x^2}$

d $\frac{8x}{x^2+3x} = \frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}$, mits $x \neq 0$.

Opgave 18

Werk eerst de haakjes uit en ontbind daarna in factoren.

a $2x(x-4) - 10$

b $(x+3)(x-2) + 4x - 8$

Opgave 19

Schrijf als één breuk.

a $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

b $\frac{3}{4x} \Big/ \frac{5}{2x}$

c $\frac{2}{x} - \frac{4}{2x+5}$

d $\frac{x+1}{x} + \frac{1}{2x}$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen en het ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.