

## 1.4 Totaalbeeld

### Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Veranderingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

### Begrippenlijst

- stijgen en dalen — toenemende, afnemende of constante stijging of daling — interval — extremen
- toenametabel — vaste stapgrootte — toenamedigram
- gemiddelde verandering — differentiequotiënt — koorde

### Activiteitenlijst

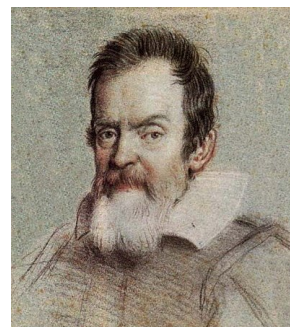
- bij een functie (of grafiek) aangeven waar hij (toenemend, afnemend) stijgt en daalt — intervalnotatie gebruiken
- bij een functie (of grafiek) een toenamedigram tekenen en omgekeerd bij een toenamedigram mogelijke grafieken van een bijpassende functie tekenen;
- bij een functie (of grafiek) het differentiequotiënt op een gegeven interval berekenen en de betekenis daarvan omschrijven;

### Achtergronden

Het wiskundig beschrijven van veranderingen is nog niet zo heel oud. Eigenlijk begon het allemaal met de Fransman **Nicole Oresme (1323 - 1382)** die de 'grafiek' bedacht om het bewegen van voorwerpen langs een rechte lijn te beschrijven.

Later gebruikte Galileo Galilei (1564 - 1642) de grafieken van Oresme om er de vrije val van een voorwerp in vacuüm mee weer te geven.

En **Isaac Newton (1642 - 1727)** en **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)** bedachten een goede techniek om veranderingen te berekenen: de 'differentiaalrekening'. Dit valt echter buiten het bestek van havo wiskunde A.



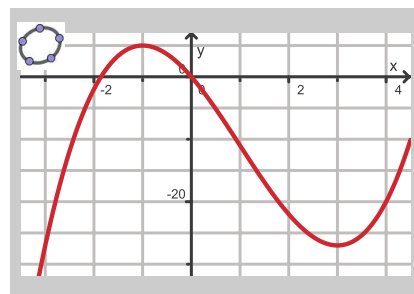
Figuur 1 Galileo Galilei (Wikipedia)

### Testen

#### Opgave 1

Bekijk de grafiek van de formule:  $y = x^3 - 3x^2 - 9x$

- Van welke soort daling is er sprake op het interval  $[0,1]$ ?
- Bereken het differentiequotiënt op dit interval en leg uit wat de betekenis van dit getal is.
- Is de grafiek voor  $x = 1$  stijgend of dalend?

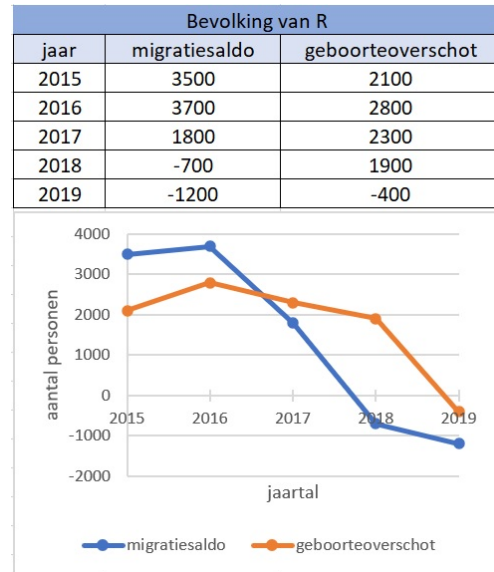


Figuur 2

### Opgave 2

Het migratiesaldo van de stad R geeft het verschil tussen het aantal mensen dat in de stad komt wonen, en het aantal mensen dat uit de stad vertrekt. Het geboorteoverschot is het verschil tussen het aantal geboortes en het aantal overledenen in de stad. Bekijk de grafiek met het migratiesaldo (rood) en het geboorteoverschot (groen) voor de jaren 2015 tot en met 2019.

- Met hoeveel mensen is het aantal inwoners in de stad in het jaar 2015 toegenomen?
- In welk jaar is het aantal inwoners in deze stad afgenomen?
- Het aantal inwoners van de stad was aan het begin van het jaar 2015 ongeveer 72600 (op honderdtallen afgerond). Teken een grafiek van het aantal inwoners in de stad in de jaren 2015 tot en met eind 2019.
- Wat is de gemiddelde bevolkingstoename per jaar in de periode van begin 2015 tot begin 2020?



Figuur 3

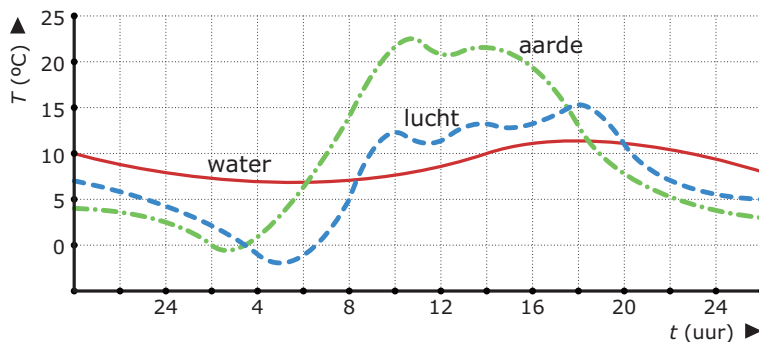
### Opgave 3

Voor de hoogte van een vuurpijl die je van de grond afschiet geldt:  $h(t) = 60t - 5t^2$   
 Hierin  $h$  de hoogte boven de begane grond in meter en  $t$  de tijd in seconden na het afschieten.

- Na tien seconden ontploft de vuurpijl. Op welke hoogte is dat?
- Teken een bijpassend toenamediagram van 0 tot 6 met stapgrootte 1.
- Bereken de gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste zes seconden.

### Opgave 4

Bekijk de grafiek van het verloop van de temperatuur van het aardoppervlak  $T_A$ , de lucht  $T_L$  en het water  $T_W$  gedurende een etmaal.



Figuur 4

- Bereken de gemiddelde veranderingssnelheid  $\frac{\Delta T_A}{\Delta t}$  van de temperatuur van het aardoppervlak tussen 4:00 uur en 12:00 uur.
- Is de veranderingssnelheid van  $T_A$  gedurende de hele periode tussen 4:00 uur en 12:00 uur constant? Waaraan zie je dat?
- Bereken de gemiddelde verandering voor  $T_A$ ,  $T_L$  en  $T_W$  voor de periode 14:00 tot 22:00 uur.
- Op welke tijdstippen van de dag stegen  $T_A$ ,  $T_L$  en  $T_W$  het snelst?

## Toepassen

### Opgave 5: Suikerbieten

Een boer verbouwt suikerbieten op een bepaalde lap grond. Voor het onkruid wieden heeft hij personeel in dienst. De opbrengst bij de verkoop van de suikerbieten neemt toe als er beter wordt gewied, dus als hij meer werknemers in dienst neemt. Maar dat gaat niet onbepikt: op zeker moment lopen de bietenwieders elkaar voor de voeten en wordt het wieden er niet beter van.

Een mogelijk verband tussen de opbrengst  $R$  (in honderden euro) en het aantal werknemers  $w$  wordt gegeven door de formule  $R = -\frac{1}{3}w^3 + 6w^2$ .

Voor de boer is het interessant om te weten hoeveel werknemers hij het beste kan inhuren. Daarbij kijkt hij naar de meeropbrengst van een werknemer. Zo is de meeropbrengst van de derde werknemer  $R(3) - R(2)$ . De meeropbrengst per werknemer heet in econometaal ook wel marginale opbrengst. De boer zorgt er voor dat hij zoveel werknemers in dienst neemt dat de marginale opbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is.

- Hoeveel bedraagt de marginale opbrengst (de meeropbrengst) van de derde werknemer?
- Je kunt met je grafische rekenmachine een tabel maken van de meeropbrengsten van elk van de eerste 10 werknemers. Maak die tabel en beslis op grond daarvan hoeveel werknemers de boer in dienst zal nemen voor het bieten wieden.
- De boer kiest voor zoveel werknemers, dat de meeropbrengst van de laatste werknemer zo groot mogelijk is. Waarom doet hij dat? Waarom kiest hij niet voor het aantal werknemers waarbij de opbrengst zo groot mogelijk is?

## Examen

### Opgave 6: Viskweker

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand.

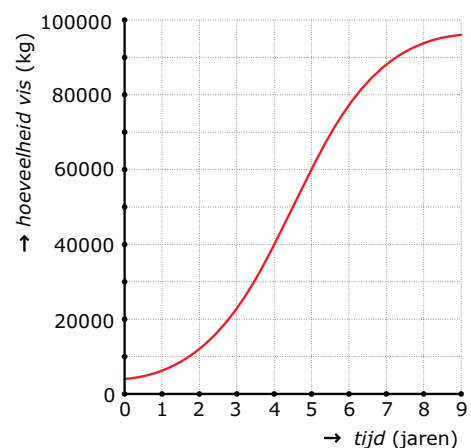
- Teken het toenamedigram voor intervallen van een jaar, te beginnen met het interval  $[1,2]$ .
- De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek.

Welk advies zou je de viskweker geven over:

- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten;
- de grootte van de jaarlijkse vangst?

Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

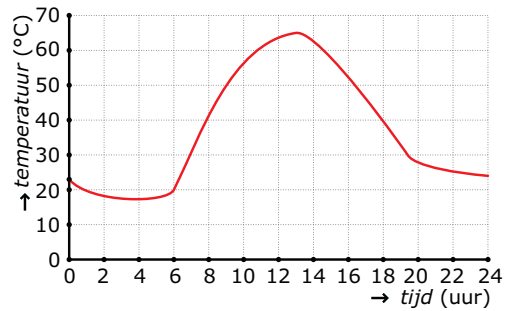
(bron: examen wiskunde A vwo 1989, eerste tijdvak)



Figuur 5

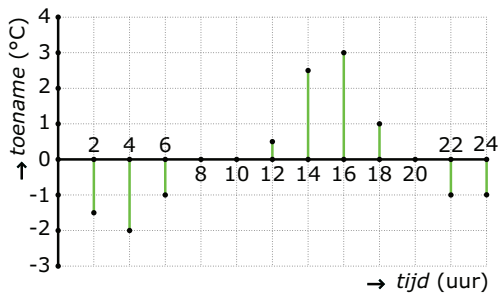
### Opgave 7: Woestijnhagedis

De woestijnhagedis leeft in de woestijnen van Californië (VS). Bekijk de grafiek van het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de woestijn. De grafiek is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Alleen als de temperatuur tussen de 36 °C en 42 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel. Hij heeft dan geen beschutting nodig. Als de temperatuur tussen de 42 °C en de 50 °C is, moet hij af en toe beschutting zoeken tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt de hagedis zich voortdurend in zijn hol.



Figuur 6

- Hoeveel uur per dag bevindt de hagedis zich in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol? Licht je antwoord toe.
- In de figuur is te zien dat de temperatuur tussen 6:00 uur en 10:00 uur vrij snel stijgt. Wat is in deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur?



Figuur 7

Bekijk het diagram met de toename/afname van de temperatuur in het hol van de hagedis. Dit diagram is typerend voor de periode eind juli/begin augustus. In het diagram kun je aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Om 8:00 uur 's morgens is de temperatuur in het hol ongeveer 38 °C.

- Teken een grafiek van de temperatuur in het hol op basis van het toename-/afnamediagram.
- Bepaal op welke momenten van de dag het temperatuurverschil tussen de omgeving en in het hol het grootst is.

(naar: examen havo wiskunde A in 1996, tweede tijdvak)

### Opgave 8: Schoon drinkwater

Overall op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig. Deze opgave gaat over het waterverbruik in de Verenigde Staten vanaf 1950.

- a** In de grafiek staan gegevens over het totale jaarverbruik ( $T$ ) en de grootte van de bevolking ( $B$ ) van de V.S. Je kunt er bijvoorbeeld uit aflezen dat in 1980 het totale waterverbruik ongeveer 1680 miljard liter per dag bedroeg, en dat de bevolking in dat jaar ongeveer 230 miljoen mensen telde.

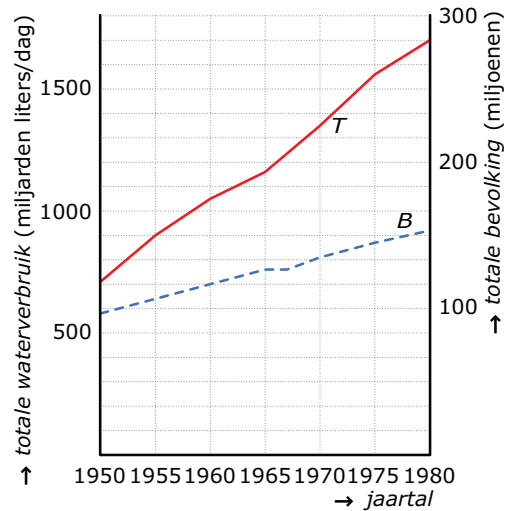
Laat zien dat het totale verbruik per jaar in 1975 gemiddeld ongeveer 2,6 miljoen liter water per inwoner was.

- b** Het aantal liters in opgave a is erg groot. Dat komt vooral door het niet-huishoudelijk waterverbruik. In 1950 was het totale waterverbruik (700 miljard liter per dag) opgebouwd uit 625 miljard liter water voor niet-huishoudelijk gebruik en 75 miljard liter per dag voor huishoudelijk verbruik.

Bekijk ook het toenamediagram van het waterverbruik per dag in de V.S. voor niet-huishoudelijk gebruik. Onderzoek of het niet-huishoudelijk verbruik als percentage van het totale waterverbruik per dag in 1980 groter was dan in 1950.

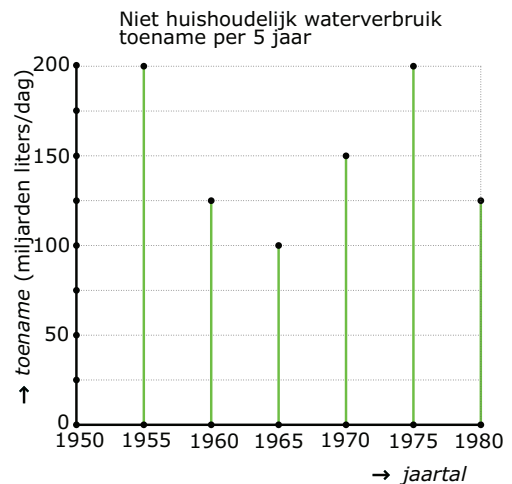
- c** Bij een onderzoek schatte men dat de toename van het totale waterverbruik elke 5 jaar zou liggen tussen 110 en 200 miljard liter per dag. Tussen welke twee getallen ligt volgens deze veronderstelling het totale waterverbruik in de V.S. in 2010?

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)



Figuur 8

gebruik en 75 miljard liter per dag voor



Figuur 9



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@xs4all.nl](mailto:a.f.otten@xs4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---