1.1 In grafieken

Inleiding

In de Delta Nederland zijn vooral de waterstanden aan verandering onderhevig. Het water in de zee kent eb (laagwater) en vloed (hoogwater). Daartussen stijgt het water of daalt het water. Maar stijging en daling zijn niet constant: vlak voor hoogwater neemt de stijging langzaam af en na hoogwater neemt de daling een paar uur lang toe.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen stijgend en dalend en constant gebruiken bij grafieken;
- toenemende, afnemende en constante stijging en daling herkennen;
- (lokale) maxima en minima van een grafiek bepalen.

Voorkennis

- grafieken bij formules tekenen en in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met formules, grafiekwaarden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Zoek via **deze website van Rijkswaterstaat** een grafiek van de waterstand bijvoorbeeld bij Vlissingen. Gebruik de kaart.

a Herken je stijging en daling in de grafiek? Kun je soorten stijging en daling beschrijven?

b Wanneer stijgt het water het snelst?

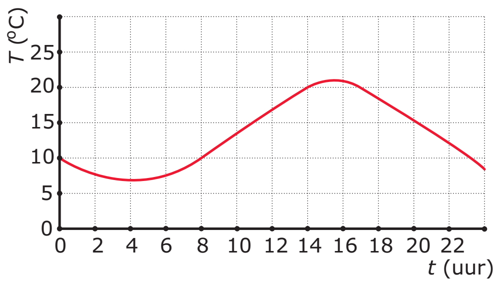
c Hoe zit het met de stijging van het water bij ‘hoog water’?

Uitleg

Deze grafiek geeft de gemiddelde temperatuur T (°C) weer, afhankelijk van de tijd t (h).

De temperatuur stijgt van $t = 4$ tot aan $t = 15{,}5$. Als t toeneemt van 4 tot 15,5, wordt T groter. De grafiek is stijgend op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$. Dit betekent: alle getallen tussen 4 en 15,5, maar 4 en 15,5 zelf niet.

De temperatuur daalt van $t = 15{,}5$ tot aan $t = 24$. Als t toeneemt van 15,5 tot 24, wordt T kleiner. De grafiek is dalend op het interval $\langle 15{,}5; 24 \rangle$.De temperatuur is nergens constant.



Figuur 2

Op het interval $\langle 4; 15{,}5 \rangle$ blijkt dat de stijging op het interval $\langle 4{,}8 \rangle$ steeds groter wordt. De grafiek wordt steiler. Er is op dat interval sprake van toenemende stijging.

Op het interval $\langle 8{,}14 \rangle$ is er een constante stijging. De grafiek blijft daar voortdurend even steil.

Op het interval ⟨14; 15,5⟩ is de stijging steeds minder. Er is op dat interval sprake van afnemende stijging.

Op het interval ⟨0,4⟩ is er een afnemende daling.
Op het interval ⟨17,24⟩ is er een vrijwel constante daling.

De hoogste temperatuur is 21 °C. Dit is het maximum van T en het wordt bereikt op $t = 15{,}5$.
De laagste temperatuur is 7 °C. Dit is het minimum van T en het wordt bereikt op $t = 4$.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de gemiddelde temperatuur in **Uitleg 1**.

a Als de grafiek stijgend is, neemt T dan toe of juist af?

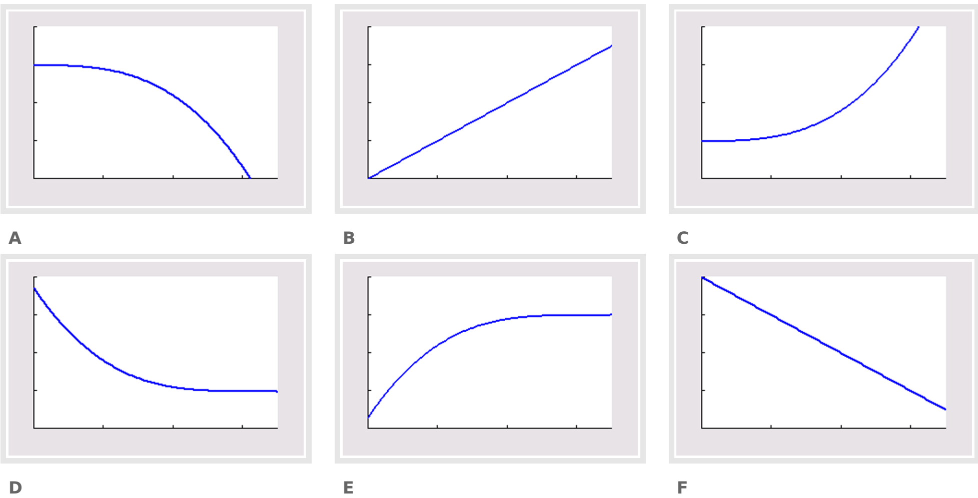
b Als de grafiek toenemend stijgend is, wat gebeurt er dan met T?

c Wat betekent een afnemende daling? Wat betekent dit voor de temperatuur T?

d Hoeveel graden stijgt de temperatuur op het interval ⟨4,8⟩?

Opgave 2

Bekijk de grafieken. Zet bij elke grafiek van welke soort stijging of daling er sprake is. Kies uit: afnemende stijging - constante stijging - toenemende stijging - afnemende daling - constante daling - toenemende daling



Figuur 3

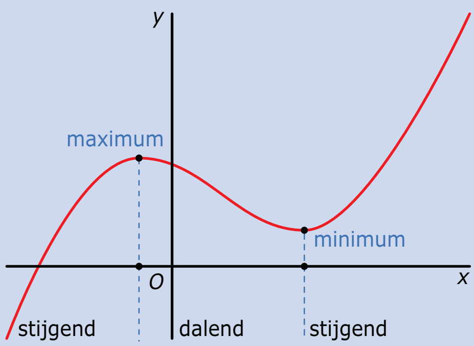
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een grafiek is:

- **stijgend** als de y-waarden groter worden bij groter wordende x.
- **dalend** als de y-waarden kleiner worden bij groter wordende x.

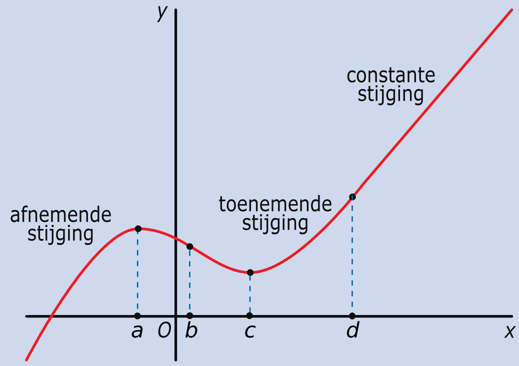
Als het om stijgen en dalen gaat noteer je de grenzen (de kleinste en de grootste x-waarden) met een open **interval**: ⟨...,...⟩.
Dan horen de grenswaarden zelf niet bij het interval.
Bij een interval waarbij de grenswaarden wel bij het interval horen, gebruik je: [...,...]. Voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je daar een pijltje.



Figuur 4

Deze grafiek heeft een:

- **afnemende stijging** op het interval $\langle \leftarrow, a \rangle$, omdat de stijging daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende daling** op het interval $\langle a,b \rangle$, omdat de daling daar steeds sterker wordt;
- **afnemende daling** op het interval $\langle b,c \rangle$, omdat de daling daar steeds minder sterk wordt;
- **toenemende stijging** op het interval $\langle c,d \rangle$, omdat de stijging daar steeds sterker wordt;
- **constante stijging** op het interval $\langle d, \rightarrow \rangle$, omdat de stijging daar steeds even sterk blijft.



Figuur 5

Verder heeft de grafiek:

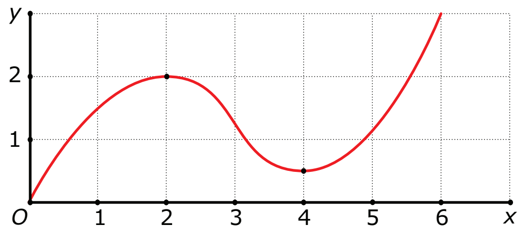
- een **maximum** of maximale y-waarde als hij overgaat van stijgend in dalend.
- een **minimum** of minimale y-waarde als hij overgaat van dalend in stijgend.

Maxima en/of minima worden **extreme waarden** (kortweg "extremen") genoemd.

Voorbeeld 1

Beschrijf de veranderingen van deze grafiek.

Geef ook de maxima en minima van de grafiek.



Figuur 6

Antwoord

Beschrijf de veranderingen van deze grafiek van links naar rechts als volgt:

- De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle 0,2 \rangle$.
- De grafiek is toenemend dalend op het interval $\langle 2,3 \rangle$.
- De grafiek is afnemend dalend op het interval $\langle 3,4 \rangle$.
- De grafiek is toenemend stijgend op het interval $\langle 4,6 \rangle$.

Verder heeft de grafiek

- een maximum van 2 voor $x = 2$.
- een minimum van 0,6 voor $x = 4$.

Dat er een minimum is bij $x = 4$, wil niet zeggen dat y niet lager kan zijn. Het minimum is een lokaal (plaatselijk) minimum, net als het maximum.

Opgave 3

Bekijk de grafiek.

a Geef het minimum van de grafiek.

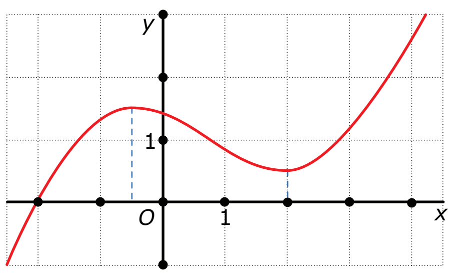
b Op welk interval is er sprake van toenemende daling?

A. $\langle -0{,}5; 0{,}75 \rangle$

B. $\langle 0{,}75; 2 \rangle$

c Op welk interval is er sprake van toenemende stijging?

d Op welke intervallen is de grafiek stijgend?



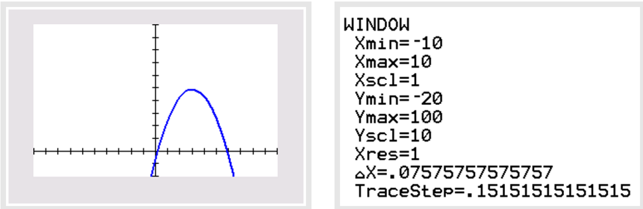
Figuur 7

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule: $y = -6x^2 + 36x - 5$.
Beschrijf de veranderingen van het verloop van de bijbehorende grafiek.

Antwoord

Plot de grafiek.
Lees af dat er een maximum zit bij (3,49). Daar gaat de grafiek over van stijgend naar dalend.
De grafiek is afnemend stijgend op het interval ⟨← ,3⟩ en toenemend dalend op het interval ⟨3, →⟩.



Figuur 8

Opgave 4

Gegeven is de formule: $y = -x^2 + 6x$

a Plot de grafiek. Op welk interval is de grafiek stijgend?

b Om welke soort stijging gaat het bij a?

A. toenemende stijging
B. afnemende stijging
C. constante stijging

c Is er in de grafiek sprake van toenemende of afnemende daling?

A. toenemende daling
B. afnemende daling

d Deze grafiek heeft een top. Hoort daarbij een minimum of een maximum?

A. een minimum van 9
B. een maximum van 9

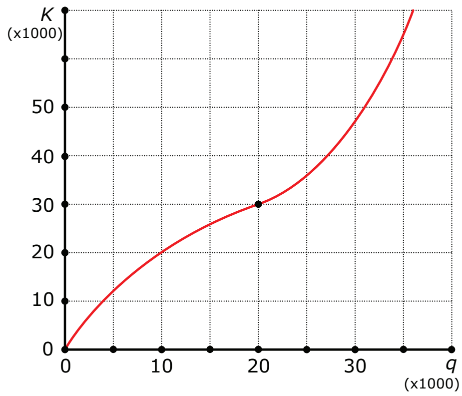
Voorbeeld 3

Bij de productie van telefoonhoesjes stijgen de kosten K met een toename van het geproduceerde aantal q. Die kostenstijging neemt echter af omdat de productielijn steeds efficiënter wordt gebruikt. Wanneer er zo'n 20000 artikelen per week worden gemaakt bedragen de kosten € 30000,00. Om nog meer telefoonhoesjes te produceren moet de productielijn worden aangepast en de kostenstijging neemt daarom weer toe.

Maak een schets van een bijpassende grafiek.

Antwoord

Op de horizontale as komt het aantal q, op de verticale as de kosten K, want de kosten hangen af van het aantal geproduceerde telefoonhoesjes. De grafiek begint in (0,0) met sterke stijging die meteen afvlakt. Dat gaat zo door tot het punt met $q = 20000$ en $K = 30000$. Daarna stijgt de grafiek steeds sterker.



Figuur 9

Opgave 5

Van een grafiek is gegeven dat:

- de grafiek constant stijgt tot $x = 2$.
- de grafiek constant is vanaf $x = 2$ tot aan $x = 3$.
- de grafiek toenemend daalt vanaf $x = 3$ tot $x = 4$ en dan afnemend daalt tot $x = 5$.
- de grafiek toenemend stijgt vanaf $x = 5$.

Maak een schets van de grafiek en geef aan bij welke waarde van x de grafiek een maximum of een minimum heeft.

Opgave 6

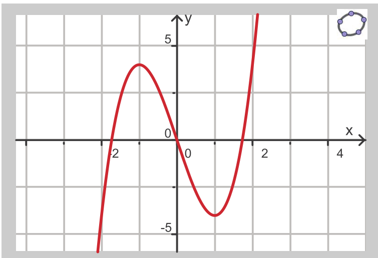
Je gebruikt nu steeds een grafiek om de veranderingen en de extremen van een formule te bepalen. Waarom kun je op deze manier nooit zeker zijn of je wel alle veranderingen en extremen hebt gevonden?

Verwerken

Opgave 7

Schrijf voor deze functie op:

- op welke intervallen de grafiek dalend dan wel stijgend is en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de snelheid van dalen dan wel stijgen het grootst is.



Figuur 10

Opgave 8

Gegeven is een functie met formule $y = 12x - x^3$.

Schrijf op:

- op welke intervallen de grafiek dalend dan wel stijgend is en om welk soort stijging of daling het daarbij gaat;
- welke extremen er zijn;
- voor welke waarden van x de snelheid van dalen dan wel stijgen het grootst is.

Opgave 9

Gegeven is de formule: $y = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$

a Plot de grafiek van deze formule. Welke maxima en minima heeft deze grafiek?

b Op hoeveel intervallen is er sprake van afnemende daling?

Opgave 10

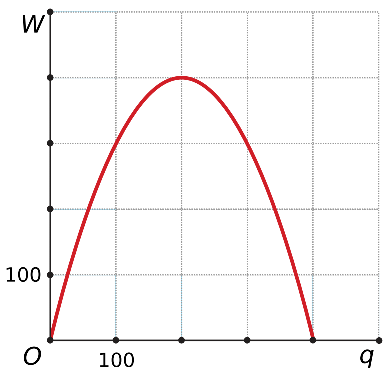
Bekijk de winstgrafiek van een bedrijf. Hierin is q het aantal geproduceerde producten en W de winst in honderden euro.

a Welke soorten stijging en daling komen er in de grafiek voor?

b Geef de bijbehorende intervallen.

c Hoeveel neemt de winst toe als q toeneemt van 100 naar 200?

d Hoe groot is de maximale winst die het bedrijf kan halen?



Figuur 11

Opgave 11

Voor de temperatuur T in °C op een bepaalde dag geldt:

- Om 6:00 uur 's morgens ($t = 6$) was de temperatuur $T = 2$ °C.
- De grafiek stijgt toenemend vanaf $t = 6$ tot aan $t = 12$.
- De grafiek stijgt afnemend van 12:00 uur tot 14:30 uur en daalt dan toenemend tot $t = 20$.
- De grafiek daalt afnemend van $t = 20$ tot aan het eind van de dag.

Maak een schets van de grafiek en leg uit bij welke waarde van t de T een maximum of minimum moet hebben.

Toepassen

Opgave 12: Winstformule

Een bedrijf maakt gebruik van de winstformule: $W = -0{,}02q^2 + 5q - 10$.
Hierin is W de winst in duizenden euro en q het aantal geproduceerde producten in honderdtallen.

a Hoe groot is de winst als er 10000 producten worden geproduceerd?

b Beschrijf met behulp van intervallen het verloop van de grafiek van W.

c Hoe hoog is de maximale winst?

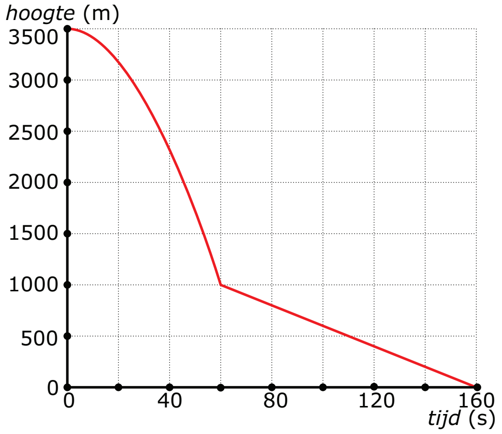
Opgave 13: Parachutist

Je ziet de grafiek die hoort bij een parachutesprong vanaf 3500 meter hoogte. Eerst maakt de parachutist een vrije val en daarna opent hij zijn parachute.

a Na hoeveel seconden heeft deze parachutist zijn valscherm geopend? Hoe zie je dat aan de grafiek?

b In de periode van vrije val is de grafiek toenemend dalend. Wat betekent dit voor de valsnelheid?

c Als de parachute uit is, is de valsnelheid constant. Hoe zie je dat aan de grafiek? Hoe groot is de valsnelheid als de parachute uitgevouwen is?



Figuur 12

Testen

Opgave 14

Je ziet hier de grafiek van de lengte van een man vanaf zijn twaalfde levensjaar tot zijn huidige leeftijd.

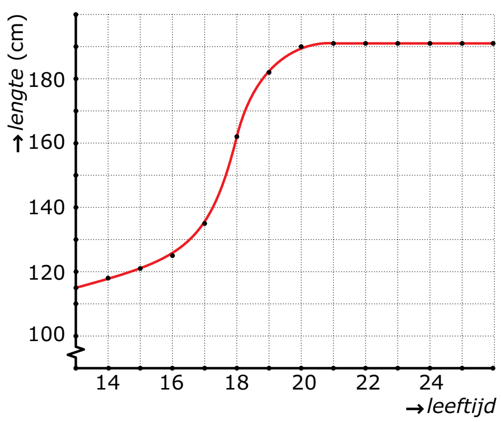
a Gedurende welk levensjaar groeit hij het snelst? Hoeveel cm groeide hij dat jaar?

b Gedurende welke periode is de grafiek stijgend?

c Gedurende welke periode is er sprake van een afnemende stijging?

d Gedurende welke periode is zijn lengte constant?

e Gedurende welke perioden is de groeisnelheid constant? Hoe zie je dat aan de grafiek?



Figuur 13

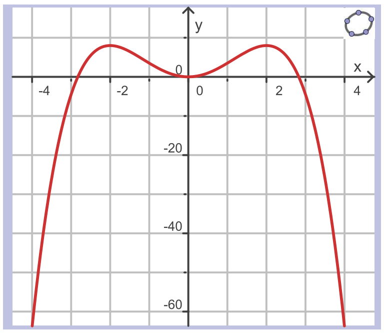
Opgave 15

Je ziet hier de grafiek van de functie $y = -0{,}5x^4 + 4x^2$.

a Op welke intervallen is de grafiek dalend?

b Op hoeveel intervallen is de grafiek afnemend dalend.

c Geef de extreme waarden van de grafiek.



Figuur 14

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.