

## 5.5 Totaalbeeld

### Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Allerlei verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan. Ga na, of je alle bij dit onderwerp behorende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

### Begrippenlijst

- formule met meerdere variabelen — grafiekenbundel
- gebied — grenslijn
- recht evenredig — omgekeerd evenredig — hyperbolisch verband
- lineair en exponentieel verband — extrapoleren

### Activiteitenlijst

- werken met formules van meerdere variabelen, met name waarden invullen en formules combineren — grafiekenbundel tekenen
- een gebied aangeven met ongelijkheden — bij een stelsel ongelijkheden een gebied tekenen met behulp van grenslijnen
- een recht evenredig, een omgekeerd evenredig en een hyperbolisch verband herkennen — hierbij vergelijkingen en ongelijkheden oplossen — asymptotisch gedrag benoemen
- lineaire en exponentiële verbanden herkennen en vergelijken — bijbehorende vergelijkingen en ongelijkheden oplossen

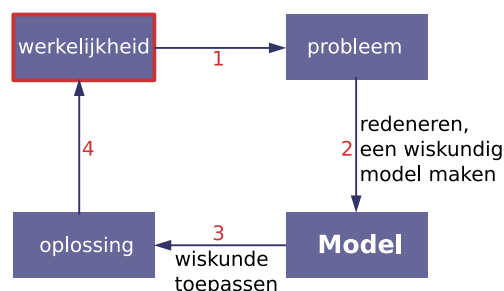
### Achtergronden

Tegenwoordig heeft een veel vakgebieden de wiskunde zijn intrede gedaan. Vaak gaat het dan om het opstellen van een **wiskundig model** aan de hand waarvan voorspellingen gedaan kunnen worden. Zo'n model bestaat uit variabelen en bijbehorende formules.

Een model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid waarin nog alle eigenschappen zijn terug te vinden die belangrijk zijn voor de beschrijving van het verschijnsel dat je wilt verklaren. Het bewust opstellen van zo'n model heet **modelleren**.

Bij het modelleren volg je een viertal vaste stappen.

1. Je kijkt naar de werkelijkheid en stelt jezelf een vraag: de probleemstelling. Je bedenkt welke grootheden en variabelen een rol spelen.
2. Je vereenvoudigt de werkelijkheid door aannames te doen en ontwerpt een wiskundig model dat zo goed mogelijk bij de probleemstelling past. Je geeft duidelijke definities van de grootheden waartussen je verbanden gaat zoeken. Je moet ook goed bijhouden waarom je bepaalde dingen weglaat.
3. Je zoekt het antwoord op je vraag door in je model wiskundige berekeningen toe te passen. Het antwoord kan de oplossing van het probleem zijn, maar ook een beschrijving van de bepaalde situatie.
4. Je kijkt of je antwoord wel bij de werkelijkheid past. Je moet je antwoord 'terugvertalen'. Als dat kan, ontwerp je ook een test. Daarmee onderzoek je of je model goed genoeg was of moet worden bijgesteld en doorloop je de cyclus opnieuw.



Figuur 1

## Testen

### Opgave 1

In de micro-economie wordt het volgende rekenmodel voor de winst van de verkoop van een bepaald product gehanteerd als het bedrijf de enige aanbieder is.

Het aantal verkochte producten hangt alleen af van de prijs  $p$  in euro per stuk. Hoe hoger de prijs, hoe lager de hoeveelheid  $q$  die van dit product wordt verkocht per tijdseenheid. Bijvoorbeeld: per week kan dan gelden  $q = 500 - 2p$ .

De inkoopkosten hangen weer af van de inkoopprijs per eenheid en de voorraadkosten. De inkoopprijs van een eenheid product kan bijvoorbeeld € 5,00 zijn en de voorraadkosten kunnen € 2000,00 per week zijn.

Voor de opbrengst als wekelijks de hele voorraad wordt verkocht, geldt  $TO = p \cdot q$ , de wekelijkse kosten noem je  $TK$  en de winst is  $TW = TO - TK$ .

- Waarom is  $TO = p \cdot q$ ?
- Stel een formule op met  $TK$  uitgedrukt in  $q$ .
- Laat zien dat  $TW = pq - 2000 - 5q$ .
- Toon aan dat je bij invullen van  $q = 500 - 2p$ ,  $TW = -2p^2 + 510p - 4500$  krijgt.
- Bepaal de maximale winst.

### Opgave 2

Een olympische triathlon bestaat uit de onderdelen zwemmen, fietsen en hardlopen. Het energieverbruik in kcal tijdens een triathlon kan berekend worden met de formule  $E = 6kZ + 12kF + 11,5kH$ . Hierin is  $E$  het energieverbruik in kcal,  $k$  het gewicht in kg,  $Z$  het aantal uur zwemmen,  $F$  het aantal uur fietsen, en  $H$  het aantal uur hardlopen.

- Willem weegt 70 kg en traint voor een triathlon. Hij gaat eerst een kwartier zwemmen, dan een half uur fietsen, en dan nog drie kwartier hardlopen. Bereken het energieverbruik van Willem in kcal.
- Een olympische triathlon bestaat uit 1,5 km zwemmen, 40 km fietsen, en 10 km hardlopen. Willem doet gemiddeld een half uur over het onderdeel zwemmen. Zijn hardlooptijd varieert nog heel erg. Zijn fietstijd varieert tussen de 1,2 uur en 1,6 uur. Maak met de grafische rekenmachine bij deze formule een grafiekenbundel met  $F = 1,2$ ,  $F = 1,4$ ,  $F = 1,6$ .
- Bij de laatste keren dat Willem trainde voor de olympische triathlon had hij een energieverbruik van tussen de 2200 en 2400 kcal en een fietstijd van tussen de 1,2 en 1,4 uur. Geef in de grafiekenbundel het gebied aan dat hierbij hoort.
- Welke ongelijkheden beschrijven dit gebied?
- Tussen welke tijden zat de hardlooptijd van Willem tijdens deze laatste trainingen? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

### Opgave 3

Los algebraïsch de volgende vergelijkingen op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- $\frac{500}{v-10} = 20$
- $\frac{500}{v} - 10 = 20$

### Opgave 4

De gymnastiekdocenten van een school organiseren een prestatie-loop voor de vierde klassen. Er moet een afstand van vijftien kilometer worden afgelegd. De gemiddelde snelheid voor een loper in kilometer per uur is  $v$ , de totale tijd  $t$ .

- Wat voor soort verband bestaat er tussen de snelheid en de tijd?
- Geef een formule die de looptijd  $t$  uitdrukt in de gemiddelde snelheid  $v$ .
- Hoe groot is de snelheid bij een looptijd van 100 minuten?  
Alle lopers zijn onderweg ongeveer vijf minuten tijd kwijt met het wachten bij een aantal stempel-posten.
- Maak met dit gegeven een formule voor  $t$  van de vorm:  $t = \frac{a}{v} + c$ .
- Bereken met de tweede formule de gemiddelde snelheid van een loper die in het totaal een uur en twintig minuten nodig heeft.

### Opgave 5

De afgelopen jaren is het aantal leerlingen op veel basisscholen sterk afgenomen. In het jaar 2002 zaten er op basisschool De Regenboog nog 280 leerlingen, en in 2012 waren dat er nog maar 210. De afname op basisschool De Regenboog verloopt lineair. Op basisschool De Margriet zaten in 2002 nog 250 leerlingen, en in 2014 waren dat er nog maar 188. Hier is sprake van exponentieel verval. Voor beide basisscholen is de verwachting dat de afname van leerlingen zich zo zal blijven voortzetten.

- Stel voor beide basisscholen een formule op waarmee het aantal leerlingen berekend kan worden.
- De gemeente waarin beide basisscholen staan, heeft de scholen medegedeeld dat ze moeten fuseren (samenvoegen) als ze aan het begin van het jaar 2025 gezamenlijk minder dan 250 leerlingen hebben. Ga na of de twee scholen in 2025 zullen moeten fuseren.
- Bepaal voor beide scholen de halveringstijd.

## Toepassen

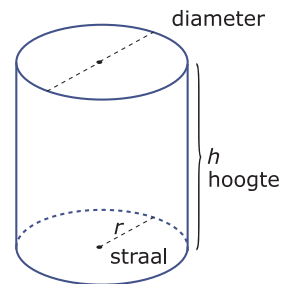
### Opgave 6: Literblik

Stel je voor dat een fabrikant zuiver cilindervormige blikken nodig heeft met een inhoud van 1 L. Om de kosten te drukken wil hij zo min mogelijk blik gebruiken. Welke afmetingen moet zo'n literblik krijgen?

Voor een cilindervormig literblik (afmetingen in cm) geldt:

- de inhoud is:  $I = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000 \text{ cm}^3$
- de oppervlakte is:  $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Je kunt hierbij een formule opstellen voor  $A$  als functie van  $r$ . Zo kun je bepalen voor welke waarde van  $r$  de oppervlakte van het literblik zo klein mogelijk is. En zo bepaal je de afmetingen van het literblik met de kleinste materiaalkosten.



Figuur 2

- Wordt bij de formule voor de oppervlakte  $A$  ook het deksel en de bodem van het blik meegerekend? Waaraan zie je dat?
- Laat zien hoe je de formule voor  $A$  als functie van  $r$  kunt afleiden.
- Maak zelf de bijpassende grafiek van  $A$  en bepaal voor welke  $r$  de materiaalkosten zo klein mogelijk zijn.
- Voor bepaalde stoffen (bijvoorbeeld verschillende soorten olie) worden zuiver balkvormige blikken gebruikt. In verband met het makkelijk stapelen worden voor een bepaald merk olie 10-liter-blikken gebruikt waarvan lengte en breedte gelijk zijn. Bereken ook voor deze blikken de afmetingen bij een zo klein mogelijke oppervlakte aan blik.

## Opgave 7: Paracetamol

Paracetamol is een veelgebruikte pijnstiller, die in tabletvorm te koop is. Voor volwassenen zijn er tabletten die 500 mg paracetamol bevatten.

Na het innemen van een tablet wordt de 500 mg paracetamol via maag en darmen bijna volledig in het bloed opgenomen. Gebruik het volgende wiskundige model voor de opname van paracetamol in het bloed:

Tien minuten na het innemen van een tablet is de helft van de paracetamol opgenomen in het bloed. De andere helft zit dan nog in maag en darmen. Van de achtergebleven paracetamol in maag en darmen wordt in de volgende tien minuten weer de helft opgenomen in het bloed. Ook daarna wordt iedere tien minuten de helft van de paracetamol die nog in maag en darmen zit, opgenomen in het bloed.

Een volwassene neemt om 9:00 uur één tablet van 500 mg in.

- Laat met een berekening zien dat na één uur ongeveer 492 mg paracetamol in het bloed is opgenomen.
- Stel een formule op voor het aantal mg paracetamol  $P$  in de maag na  $t$  uur.  
Het pijnstillend effect is merkbaar zolang de hoeveelheid paracetamol in het bloed meer is dan 200 mg. Als de hoeveelheid paracetamol onder de 200 mg zakt, is het pijnstillend effect niet meer merkbaar: de tablet is uitgewerkt. Een volwassene die om 9.00 uur een tablet heeft ingenomen, zal merken dat deze tablet in de loop van de middag is uitgewerkt.
- Bereken op welk moment de tablet is uitgewerkt. Geef je antwoord in uren en minuten nauwkeurig.

## Examen

### Opgave 8: Park 'N Fly

In de Verenigde Staten komen veel mensen met de auto naar het vliegveld. Ze parkeren hun auto op een parkeerterrein in de buurt. Eén van de parkeerterreinen bij het vliegveld van Minneapolis wordt beheerd door het bedrijf Park 'N Fly. In 2010 had dit terrein 2100 parkeerplaatsen. Het normale parkeertarief in 2010 was \$ 10,00 (10 dollar) per dag. Online gekochte parkeerkaarten waren \$ 1,00 per dag goedkoper.

Ga in deze opgave uit van de situatie in 2010 en neem aan dat alle klanten die hun parkeerkaart online kopen, komen opdagen. Reken alleen met de parkeerprijs per dag.

- Op een dag zijn 2065 parkeerplaatsen bezet. De totale inkomsten voor het bedrijf zijn die dag \$ 20214,00.  
Bereken hoeveel klanten die dag hun parkeerkaart online gekocht hebben.
- Park 'N Fly wil dat de opbrengst per dag minimaal \$ 20250,00 is.  
Stel bij deze situatie twee ongelijkheden op en kleur het gebied waarbinnen de oplossingen zich bevinden.
- Lees uit het gekleurde gebied een oplossing af. En laat met berekeningen zien dat deze oplossing voldoet aan beide ongelijkheden.

Van maandag tot en met donderdag is het parkeerterrein goed gevuld. Maar op vrijdag en in het weekend zijn er nogal wat lege plaatsen. Het bedrijf wil graag dat deze plaatsen benut worden, desnoods tegen een lager tarief. Er wordt voor vrijdag en het weekend een nieuw tarief geïntroduceerd, het actietarief. De hoogte van het actietarief wordt slechts een paar dagen van tevoren bepaald en parkeerkaarten tegen dit tarief kunnen alleen online gekocht worden. Uit onderzoek blijkt dat bij een actietarief van \$ 6,00 er 1500 klanten hun auto tegen dit tarief zullen parkeren bij Park 'N Fly. Bij een actietarief van \$ 5,00 zijn dat er zelfs 1700.  
Stel dat het actietarief wordt bepaald op \$ 4,20.

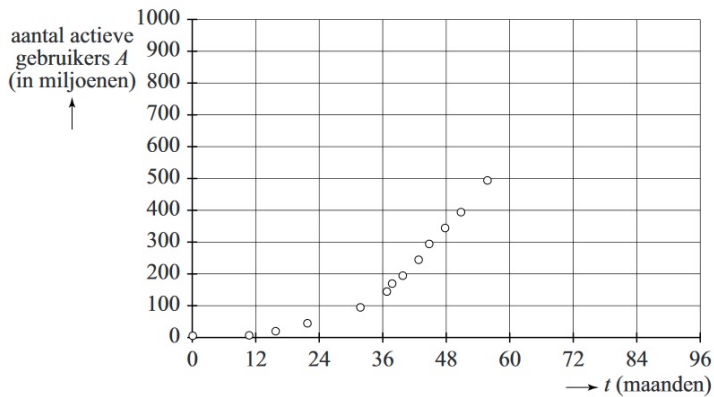
- Bereken met lineair extrapoleren, uitgaande van de gegeven waarden, hoeveel klanten hun auto dan tegen dit tarief bij Park 'N Fly zullen parkeren.

(naar: examen havo wiskunde A in 2014, tweede tijdvak)

### Opgave 9: Sociaal netwerk

Facebook is een sociaalnetwerksite, opgericht door Mark Zuckerberg in februari 2004. In het begin konden alleen studenten van Harvard College lid worden, later werden ook studenten van andere universiteiten toegelaten. In september 2006 werd Facebook geheel openbaar. Iedereen vanaf 13 jaar, waar ook ter wereld, kreeg de mogelijkheid om zich te registreren en actief gebruik te gaan maken van de site.

Het aantal actieve gebruikers steeg de eerste jaren spectaculair. Zie figuur 1, waarin het aantal actieve gebruikers op verschillende momenten is aangegeven.



Figuur 3

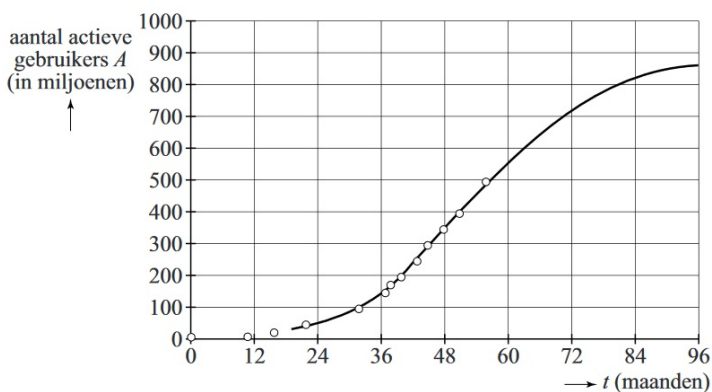
Op 1 december 2005, dat is bij  $t = 0$ , waren er 5,5 miljoen actieve gebruikers, 43 maanden later, op 1 juli 2009, waren het er al 244 miljoen. Neem aan dat er in deze periode bij benadering sprake was van exponentiële groei.

- a Bereken voor deze periode het groeipercentage per maand.

In de maanden na 1 juli 2009 groeide het aantal actieve gebruikers niet meer exponentieel maar bij benadering lineair, van 244 miljoen op 1 juli 2009 tot 493 miljoen op 1 augustus 2010. Er werd in 2011 voorspeld dat de groei zich op deze manier zou voortzetten.

- b Bereken hiermee het aantal actieve gebruikers op 1 december 2013.

Het bleek erg optimistisch om aan te nemen dat de groei zich lineair voortzet. Al in 2011 voorspelden sommigen dat de groei verder zou afnemen. In figuur 2 zie je een grafiek die bij deze voorspelling past.



Figuur 4

Bij deze grafiek hoort de formule:

$$A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,926^t}$$

Hierin is  $A$  het aantal actieve gebruikers in miljoenen en  $t$  de tijd in maanden met  $t = 0$  op 1 december 2005.

- c Bereken voor welke gehele waarde van  $t$  er volgens de formule voor het eerst meer dan 730 miljoen actieve gebruikers zijn.

Volgens de formule zal het aantal actieve gebruikers uiteindelijk nauwelijks meer toenemen en een grenswaarde benaderen.

- d** Bepaal deze grenswaarde met behulp van de formule.

**(bron: examen havo wiskunde A in 2015, eerste tijdvak)**



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@xs4all.nl](mailto:a.f.otten@xs4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

