5.3 Omgekeerd evenredig

Inleiding

Ga je met de auto van het centrum van Apeldoorn naar dat van Deventer, dan geeft de ANWB-routeplanner aan dat je een stuk van 16 km op de snelweg moet rijden. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 16 km doet. De tijd die je nodig hebt is omgekeerd evenredig met de snelheid. Maar als je onderweg moet tanken, ligt dit allemaal weer anders...

Je leert in dit onderwerp

- in formules recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden herkennen;
- grafieken bij recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden maken en asymptotisch gedrag benoemen;
- vergelijkingen en ongelijkheden bij recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden oplossen, ook algebraïsch.

Voorkennis

- werken met grafieken en formules, ook met de GR;
- formules herleiden, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen, ook algebraïsch;
- werken met breuken.

Verkennen

Opgave V1

Ga je met de auto van het centrum van Apeldoorn naar dat van Deventer, dan geeft de ANWB-routeplanner aan dat je een stuk van 16 km op de snelweg moet rijden. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 16 km doet. De tijd die je nodig hebt is omgekeerd evenredig met de snelheid.

a Je mag maximaal 120 km/h rijden op de snelweg. Hoeveel minuten ben je dan onderweg?

b Het is druk dus je rijdt (gemiddeld) 80 km/h. Hoeveel minuten ben je onderweg?

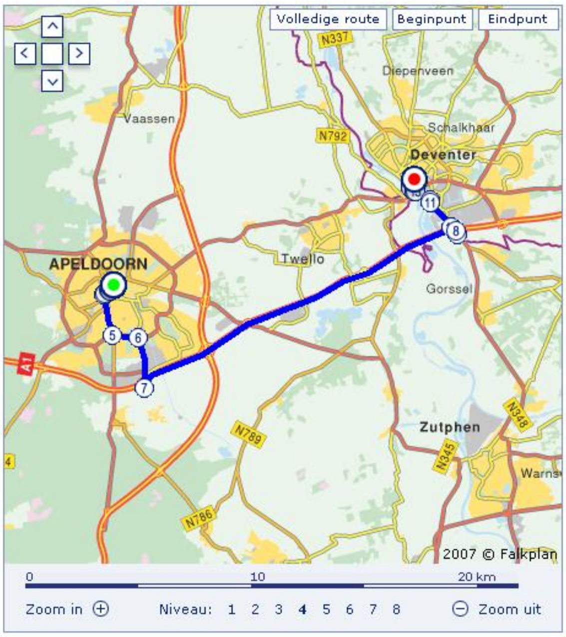
c Welke formule kun je opstellen voor de reistijd t (in min.) als functie van de snelheid v (in km/h)?

Uitleg 1

Van Apeldoorn naar Deventer is het met de auto 16 km over de snelweg. Met een snelheid van 120 km/h wordt er iedere minuut $\frac{120}{60} = 2$ km afgelegd. De afgelegde afstand is bij een vaste snelheid recht evenredig met de tijd: als de reistijd twee keer zo lang wordt, dan wordt ook de afgelegde afstand twee keer zo groot.

Hoe hoger de snelheid, hoe korter de reistijd over die 16 km. De reistijd is omgekeerd evenredig met de snelheid: wordt er twee keer zo snel gereden, dan is de helft van de reistijd nodig.

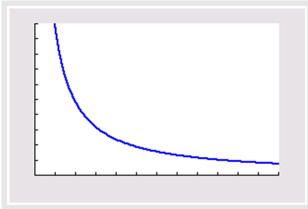
- Bij een snelheid van 120 km/h is de reistijd $\frac{16}{120} \cdot 60 = 8$ minuten.
- Door de drukte kan er (gemiddeld) maar 60 km/h gereden worden. Dan is de reistijd $\frac{16}{60} \cdot 60 = 16$ minuten.



Figuur 1

De reistijd t in minuten kan berekend worden door de afstand van 16 km te delen door de snelheid v (km/h) en met 60 te vermenigvuldigen: $t = \frac{16}{v} \cdot 60 = \frac{960}{v}$

Bekijk de grafiek van zo'n omgekeerd evenredig verband. Voor snelheden dicht bij 0 wordt de reistijd heel erg groot. Voor hele grote snelheden wordt de reistijd vrijwel 0.



Figuur 2

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Welk soort verband bestaat er tussen de afgelegde weg en de tijd bij een vaste snelheid?

b Vul in: als bij een vaste snelheid de reistijd drie keer zo lang wordt, dan wordt de afgelegde afstand ... keer zo groot.

c Welk soort verband bestaat er bij een vaste afstand tussen de reistijd en de snelheid?

A. recht evenredig verband
B. omgekeerd evenredig verband

d Vul in: wordt er vier keer zo snel gereden, dan wordt de reistijd ... keer zo groot.

e De reistijd t in minuten kan berekend worden door de afstand van 16 km te delen door de snelheid v (km/h) en met 60 te vermenigvuldigen.
Waarom moet er met 60 vermenigvuldigd worden?

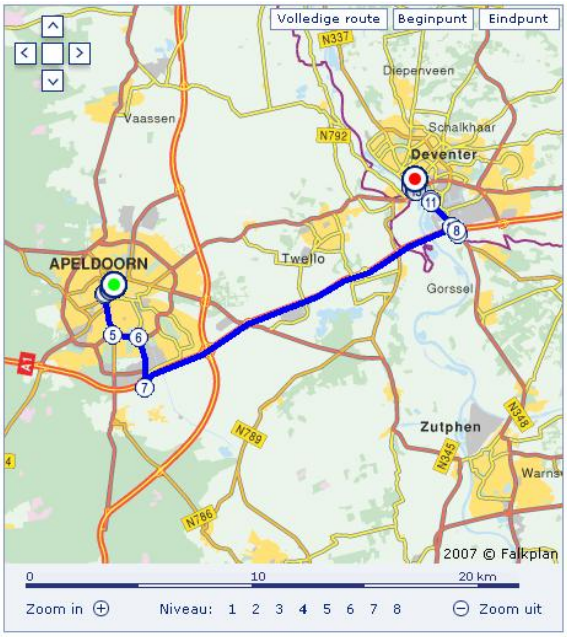
f Leg uit waarom bij snelheden dicht bij 0 de reistijd heel erg groot wordt.

Uitleg 2

Van Apeldoorn naar Deventer is met de auto 16 km over de snelweg. Hoe hoger de snelheid, hoe korter de reistijd over die 16 km. Onderweg wordt 5 minuten gestopt voor het tanken van brandstof.

- Bij een snelheid van 120 km/h is de reistijd $\frac{16}{120} \cdot 60 + 5 = 13$ minuten.
- Door de drukte kan er (gemiddeld) maar 60 km/h gereden worden. Dan is de reistijd $\frac{16}{60} \cdot 60 + 5 = 21$ minuten.

Nu betekent een verdubbeling van de snelheid niet een halvering van de reistijd. Snelheid en reistijd zijn niet omgekeerd evenredig.

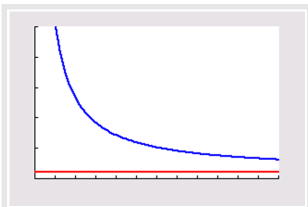


Figuur 3

De reistijd t in minuten kan berekend worden door de afstand van 16 km te delen door de snelheid v (km/h), dan met 60 te vermenigvuldigen en tenslotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$t = \frac{16}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{960}{v} + 5$

Bekijk de grafiek van zo'n hyperbolisch verband. Voor snelheden dicht bij 0 wordt de reistijd heel erg groot. Voor hele grote snelheden komt de reistijd in de buurt van de 5 minuten.



Figuur 4

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 2** over hyperbolische verbanden.

a Waarom is er in de situatie in de uitleg geen omgekeerd evenredig verband tussen snelheid en reistijd?

b De reistijd t in minuten kan berekend worden door de afstand van 16 km te delen door de snelheid v (in km/h), dan met 60 te vermenigvuldigen en tenslotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen.
Waarom moet er op het laatst nog 5 bij opgeteld worden?

c Leg uit waarom bij hele grote snelheden de reistijd in de buurt van de 5 minuten komt.

Opgave 3

Iemand uit Apeldoorn bezoekt regelmatig familie in Rotterdam. De afstand tussen Apeldoorn en Rotterdam is ongeveer 150 kilometer. Onderweg naar de familie in Rotterdam wordt altijd een half uur gepauzeerd.

a Hoe lang duurt de rit als er gemiddeld 100 kilometer per uur wordt gereden?

b Bereken de gemiddelde snelheid als de rit 2,5 uur duurt.

c Geef een formule met t uitgedrukt in v.

d Geef ook een formule die v uitdrukt in t.

e Voor welke waarden van t en v is deze formule bruikbaar?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Twee variabelen x en y zijn **recht evenredig** wanneer geldt: als een x-waarde k keer zo groot wordt, wordt de bijbehorende y-waarde ook k keer zo groot. Bij een recht evenredig verband hoort een formule van de vorm $y = cx$, waarin c een constante is. De grafiek van een recht evenredig verband is een rechte lijn die door de oorsprong gaat en die c als richtingscoëfficiënt heeft.

Bekijk de applet.

Twee variabelen x en y zijn **omgekeerd evenredig** wanneer geldt: als een x-waarde k keer zo groot wordt, wordt de bijbehorende y-waarde k keer zo klein. Bijvoorbeeld: wordt x twee keer zo groot, dan wordt y een half keer zo groot (ofwel twee keer zo klein). Bij een omgekeerd evenredig verband hoort een formule van de vorm $x \cdot y = c$. Deze formule is ook te schrijven als $y = \frac{c}{x}$.

Bij een formule van de vorm $y = \frac{c}{x} + a$ spreek je van een **hyperbolisch verband**. Hoewel dan x en y niet omgekeerd evenredig zijn, lijkt de grafiek wel op die van een omgekeerd evenredig verband. Hij is alleen a verschoven in de y-richting.

Naarmate in een hyperbolisch verband de x-waarde hogere waarden aanneemt, komt de grafiek heel dicht bij de y-waarde a. De grafiek komt dus steeds dichter bij de de lijn $y = a$.
En zo neemt de grafiek hele grote waarden aan als die dichter bij de lijn $x = 0$ komt. Die grote waarden kunnen positief of negatief zijn. Dat hangt af aan welke kant van de y-as de grafiek loopt.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Als een rechthoekig tafelblad een oppervlakte van 1 m^2 heeft, kunnen lengte l en breedte b variëren.

- Stel een passende formule op met l en b in centimeter.
- Laat zien dat l en b omgekeerd evenredig zijn.
- Welke breedte heeft een rechthoekige tafel met een oppervlakte van 1 m^2 en een lengte van minimaal 240 cm? Stel hierbij een ongelijkheid op en los deze algebraïsch op.

Antwoord

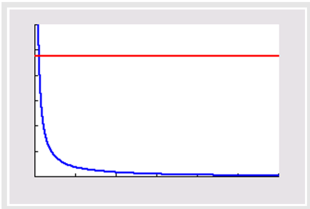
- 1 m^2 = 10000 cm^2.
  Voor deze rechthoek geldt: *oppervlakte* $= 10000 = l \cdot b$.
  Dus: $l = \frac{10000}{b}$.
- Als b verdubbelt, halveert l, bijvoorbeeld:
  $b = 50$ cm geeft $l = \frac{10000}{50} = 200$ cm;
  $b = 100$ cm geeft $l = \frac{10000}{100} = 100$ cm.
  Dit geldt ook voor andere waarden, dus l en b zijn inderdaad omgekeerd evenredig.
- Uit $\frac{10000}{x} = 240$ volgt $x = 41\frac{2}{3}$.

  Voer in: $y_1 = \frac{10000}{x}$ en $y_2 = 240$.

  Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 300$ en $0 \leq y \leq 300$.

  Lees uit de grafieken de juiste oplossing af: $b \leq 41\frac{2}{3}$

  De tafel wordt $41\frac{2}{3}$ cm breed of minder.



Figuur 5

Opgave 4

Bas wil een rechthoekige tafel met een oppervlakte van 2 m^2 en een lengte van minimaal 440 cm. Welke breedte hoort hierbij? Stel een ongelijkheid op en los deze algebraïsch op.

Opgave 5

Lengte l en breedte b van een rechthoek met een oppervlakte van 1 m^2 zijn omgekeerd evenredig.

a Welke drie formules passen bij het verband tussen l en b als beide in centimeter zijn?

b Plot de grafiek met l uitgedrukt in b.

c Laat met behulp van de formule uit b zien dat l wordt gehalveerd als b wordt verdubbeld. Vervang daarvoor b in $2b$.

d Als b tien keer zo groot wordt, hoeveel keer zo groot wordt l dan?

e Als b met $\frac{1}{10}$ wordt vermenigvuldigd, hoeveel keer zo groot wordt l dan?

Voorbeeld 2

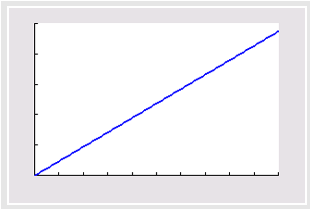
Voor een vakantiebaantje krijg je een vast bedrag per uur. Als je 8 uur op een dag werkt, verdien je € 38,00.

- Waarom is het salaris dat je dan verdient recht evenredig met het aantal uur dat je hebt gewerkt?
- Stel een formule op waarmee het salaris s (euro) berekend kan worden als het aantal gewerkte uren u bekend is en plot de grafiek.
- Je wilt minimaal € 200,00 verdienen aan dit baantje. Hoeveel uur moet je daarvoor werken?

Antwoord

- Omdat je een vast bedrag per uur krijgt en verder niets.
- De formule is: $s = 4{,}75u$.

  Voer in: $y_1 = 4{,}75x$.
  Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 250$.
  De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 4,75 en hij gaat door de oorsprong.
  Als u twee keer zo groot wordt, dan wordt s twee keer zo groot.
- Je moet nu $4{,}75s \geq 200$ oplossen.
  Uit $4{,}75s = 200$ volgt $s \approx 42{,}1$.
  Je moet dus minimaal 43 uur werken.



Figuur 6

Opgave 6

Gegeven is de formule: $y = 21x$

a Plot de grafiek die hoort bij deze formule.

b Welke eigenschappen heeft de grafiek?

c Vul in: als x vijf keer zo groot, dan wordt y ... keer zo groot.

d Wat voor soort verband beschrijft de formule?

e Los de ongelijkheid $21x \leq 15$ exact op.

Opgave 7

Stel een formule op voor iedere situatie.

a Het jaarinkomen I van een sportclub als ieder lid l een jaarlijkse contributie van € 65,00 betaalt.

b De kosten K voor de flessen cola c die ik koop als iedere fles € 1,10 kost.

c Voor een toets kun je 40 punten halen en je cijfer C kun je berekenen door een kwart te nemen van het behaalde aantal punten p.

d Je totale opbrengst O bij een sponsorloop als ieder rondje r € 2,50 oplevert.

Voorbeeld 3

Voor het laten drukken van folders moet een vast bedrag van € 10,00 plus € 0,04 per folder betaald worden. De kosten per folder zijn daarom hoog als er maar weinig afgedrukt moeten worden. Stel een formule op voor de kosten per folder en bereken met behulp daarvan bij welk aantal folders de drukkosten niet hoger zijn dat € 0,05.

Antwoord

Voor de totale kosten TK (in euro) geldt: $TK = 10 + 0{,}04a$. Hierin is a het aantal folders.

Voor de totale kosten per folder TKF (in euro) geldt: $TKF = \frac{10+0{,}04a}{a} = \frac{10}{a} + 0{,}04$.

$\frac{10}{a} + 0{,}04 = 0{,}05$ oplossen geeft $a = 1000$.

Dus vanaf 1000 folders zijn de drukkosten per folder lager dan € 0,05.

Opgave 8

Voor het laten drukken van luxe folders moet een vast bedrag van € 25,00 en daar bovenop € 0,12 per folder betaald worden. De totale kosten per folder zijn hoog als er maar weinig afgedrukt moeten worden. De totale kosten per folder TKF (in euro) hangen af van het aantal folders a dat gedrukt moet worden.

a Stel een formule op voor de totale kosten per folder TKF.

b Waarom is TKF niet omgekeerd evenredig met a?

c Teken de grafiek met TKF uitgedrukt in a op de grafische rekenmachine.

d Bereken met behulp van de formule bij welk aantal folders de drukkosten niet hoger zijn dan € 0,15 per folder.

Opgave 9

Los de vergelijkingen algebraïsch op:

a $\frac{400}{v} + 120 = 200$

b $\frac{20}{a-10} - 6 = 10$

Verwerken

Opgave 10

Iemand uit Apeldoorn bezoekt regelmatig familie in Rotterdam. De afstand tussen Apeldoorn en Rotterdam is ongeveer 150 kilometer. Hij rijdt gemiddeld 100 kilometer per uur.

a Hoeveel kilometer wordt er iedere minuut afgelegd?

b Met welke formule kan voor deze persoon de afgelegde afstand berekend worden als de tijd bekend is? Neem de tijd t in minuten en de afgelegde afstand a in kilometer.

c Plot de grafiek bij deze formule. Noem twee opvallende eigenschappen van de grafiek.

Opgave 11

In een groot winkelbedrijf wordt onderzocht hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro.

a Plot een grafiek waaruit je de verkoop kunt aflezen voor prijzen tussen de € 1,00 en € 5,00 per kilogram.

b Iemand zegt: 'Een verdubbeling van de prijs zorgt voor een halvering van de verkoop.' Klopt dat?

A. De bewering is waar.
B. De bewering is niet waar.

c Klopt deze bewering met de formule: 'Als de prijs vijf keer zo hoog wordt, wordt de verkoop vijf keer zo klein.'?

A. De bewering is waar.
B. De bewering is niet waar.

d Geef twee andere formules voor hetzelfde verband tussen a en p.

e In het bedrijf heeft men een voorraad van 300 kg tomaten. Deze tomaten zijn niet lang meer houdbaar en men wil er binnen een dag vanaf. Bereken de maximale prijs volgens de formule.

Een formule zoals $a = \frac{500}{p}$ is meestal slechts op een beperkt gebied bruikbaar. Dat kun je zien als je voor p extreme gevallen neemt.

f Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij een prijs van € 100,00? Zal dit in werkelijkheid ook zo zijn?

Opgave 12

Een kaasboer houdt bij hoeveel kilo geraspte kaas hij per week verkoopt. Het blijkt dat de hoeveelheid k (kg) die hij verkoopt omgekeerd evenredig is met de prijs p per kilo. Bij een prijs van € 13,00 per kilo verkoopt hij 15 kg geraspte kaas.

a Bereken $p \cdot k$ met behulp van de gegevens en geef vervolgens een formule die k uitdrukt in p.

b Bereken het aantal verkochte kilo's als de prijs € 10,00 per kilogram is.

Er is een nieuw restaurant in het pand naast hem geopend. De eigenaar van het restaurant neemt iedere week 15 kg kaas af. (De prijs die hij betaalt, wordt in onderling overleg met de kaasboer bepaald.)

c Bereken in de nieuwe situatie het aantal verkochte kilo's als de prijs € 10,00 per kilo is.

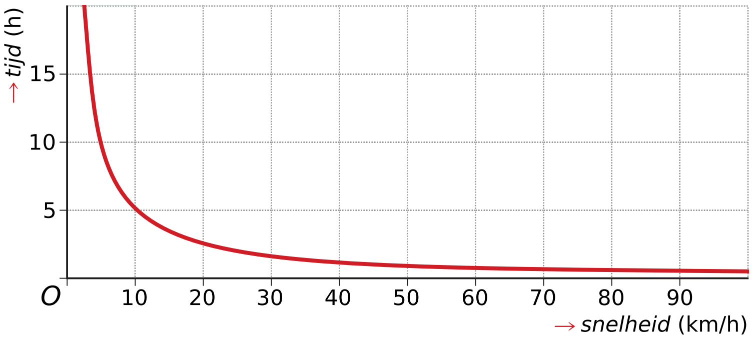
d Leg uit dat de nieuwe formule voor k de vorm $k = \frac{195}{p} + c$ heeft en bepaal de waarde van de constante c.

e Plot de grafiek van k en bepaal bij welke prijs per kilogram de verkoop per week 40 kg is.

f Bereken ook algebraïsch bij welke prijs de verkoop per week 40 kg is.

Opgave 13

Bekijk de grafiek die het verband tussen de snelheid en de tijd weergeeft voor iemand die van Utrecht naar Den Bosch reist. De (gemiddelde) snelheid v (km/h) is omgekeerd evenredig met de tijd t (h).



Figuur 7

a Een wandelaar heeft een gemiddelde snelheid van vijf kilometer per uur.
Hoelang doet hij over de afstand Utrecht - Den Bosch?

b Een fietser doet 2,5 uur over deze afstand. Bereken zijn gemiddelde snelheid.

c Bereken uit je antwoorden bij a en b het product van de tijd en de snelheid. Stel een formule op die bij de grafiek past.

d De trein van Utrecht naar Den Bosch doet er ongeveer 25 minuten over.
Hoeveel kilometer per uur rijdt de trein?

Opgave 14

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{2{,}25}{p} = 0{,}45$

b $4{,}50 + \frac{300}{k} = 4{,}70$

c $\frac{1200}{k+12} - 42 = 6$

Opgave 15

De overheid besteedt veel geld aan campagnes die waarschuwen voor de gevolgen van roken en drinken. Als deze campagnes effect hebben, dan zou binnen redelijke grenzen moeten gelden: hoe meer geld de overheid eraan besteedt, hoe minder mensen er roken. Stel dat de volgende formule geldt voor het percentage rokers van de Nederlandse bevolking:

$p = \frac{50}{b} + 15$

Hierin is p het percentage rokers en b het bedrag dat de overheid aan antirookcampagnes besteedt in miljoenen euro.

a Geldt voor deze formule inderdaad dat het percentage rokers afneemt naarmate de overheid meer geld aan campagnes besteedt?

A. ja
B. nee

b Bereken het percentage rokers als de overheid 200 miljoen euro aan campagnes besteedt.

c Er is een percentage van de bevolking dat ondanks alle campagnes hardnekkig blijft roken. Hoe groot is dat percentage?

d Het percentage rokers is nog nooit meer dan 90 geweest en zal dat waarschijnlijk ook nooit worden. Bereken welke waarde van b bij $p = 90$ hoort. Denk je dat de formule voor deze waarde van b nog geldig is?

Toepassen

Opgave 16: Geld lenen kost geld

Geld lenen kost geld. Soms kost het heel veel geld. Vooral als je direct een paar honderd euro nodig hebt. In dit soort situaties kun je een flitslening nemen. Je leent een niet al te groot geldbedrag en betaalt dit na een korte periode terug. Er bestaan verschillende websites waar je geld kunt lenen. Op de website flitsmoney.nl staat dat er geen rente wordt berekend. Je hoeft alleen behandelingskosten te betalen. In de tabel staat hoe hoog deze kosten zijn.

te lenen bedrag (euro)	behandelingskosten (euro)
100,00	25,00
250,00	62,50
300,00	75,00
375,00	93,75

Tabel 1

Als je bijvoorbeeld € 100,00 wilt lenen, krijg je dit geld binnen 10 minuten op je bankrekening. Dit bedrag moet samen met de € 25,00 behandelingskosten na 30 dagen worden terugbetaald.
Er is bij Flitsmoney een recht evenredig verband tussen het totaal terug te betalen bedrag en het te lenen bedrag. Laat dit met berekeningen zien. Controleer hiervoor alle waarden in de tabel.

(naar: examen havo wiskunde A in 2015, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 17

Dat wijnglazen groter zijn dan portglazen is niet toevallig. Voor de inhoud I (in ml) van een glas en het alcoholpercentage p van de drank die erin hoort geldt namelijk ongeveer deze formule: $p \cdot I = 1200$.

a Leid uit het bovenstaande af of wijn een hoger of lager alcoholpercentage heeft dan port.

b Gewoon bier heeft een alcoholpercentage van ongeveer 5%. Bereken de inhoud van een bierglas.

c Een jeneverglas heeft een inhoud van 35 ml. Hoe groot is het alcoholpercentage van jenever?

d Geef een formule voor I als functie van p.

e Alcoholarm bier heeft een alcoholpercentage van 2%. Is de formule nog bruikbaar voor alcoholarm bier?

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{300}{T-2} = 50$

b $\frac{300}{T} - 2 = 48$