4.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Exponentiële verbanden** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd, kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- exponentiële groei — groeifactor — macht, grondtal, exponent
- rekenregels voor machten
- algemene formule voor exponentiële groei
- exponentiële functie — exponentiële vergelijking en ongelijkheid
- logaritmische schaal — enkellogaritmisch papier

Activiteitenlijst

- formule voor exponentiële groei opstellen bij gegeven groeifactor (groeipercentage) en beginwaarde
- rekenregels voor machten toepassen — groeifactoren omrekenen naar grotere tijdseenheden
- groeifactoren omrekenen naar kleinere tijdseenheden
- eigenschappen van exponentiële functies toepassen — exponentiële functie opstellen bij gegeven punten van de grafiek
- werken met logaritmische schalen — formule opstellen bij exponentiële groei bij gegeven tabel, punten of grafiek (op enkellogaritmisch papier)

Achtergronden


Figuur 1

Thomas Robert Malthus (1766 – 1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met demografische en economische vraagstukken. In 1798 publiceerde hij 'An Essay on the Principle of Population', waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Dit leidt tot de beschikbaarheid van steeds minder grond (voedsel/energie) per mens en dus een daling in welvaart, de 'Malthusiaanse catastrofe'.
Op grond hiervan meende hij dat de totale bevolking een maximale omvang zou hebben, het 'Malthusiaans plafond'. Hij veronderstelde dat de mensheid deze maximale omvang binnen afzienbare tijd zou bereiken en dat alleen middels hongersnood, epidemieën en oorlogen het aantal mensen binnen de grenzen van het Malthusiaans plafond zou kunnen blijven. Malthus geldt als één der eerste economen. In de tweede helft van de negentiende eeuw werd deze opinie fel bestreden, onder andere door Karl Marx en Friedrich Engels die in Malthus' catastrofe slechts een gevolg van de kapitalistische samenleving zagen. Ook economen als John Maynard Smith en Ronald Fisher trokken Malthus' pessimistische kijk in twijfel. In de twintigste eeuw heeft niets van een Malthusiaanse catastrofe plaatsgevonden. Wel verscheen in 1972 het 'De grenzen aan de groei'. Dit is een geschrift van de **Club van Rome** die als doelstelling heeft de wereld bekend te maken met problemen als bevolkingsgroei, voedselproductie, industrialisatie, uitputting natuurlijke hulpbronnen en vervuiling. Ook zij maakten veel gebruik van exponentiële groeimodellen.

Testen

Opgave 1

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld, groeit de laatste jaren met 2% per jaar. In 2000 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Wat is de groeifactor per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2000.

c Als de groei zo doorgaat, hoelang duurt het dan voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is?

d Hoeveel passagiers waren er in 1997?

e Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?

f Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?

Opgave 2

In de gemeente Zaandam groeit het aantal inwoners sinds 2000 met ongeveer 3,2% per jaar. In het jaar 2000 had de gemeente Zaandam in totaal 97452 inwoners. Het aantal woningen in Zaandam was toen 35505.

a Geef een formule voor het aantal inwoners A van Zaandam waarbij je ervan uitgaat dat de groei onverminderd met hetzelfde percentage doorgaat.

b Neem aan dat alle inwoners van Zaandam in één van die 35505 woningen woonden. Hoeveel inwoners telde Zaandam in 2000 gemiddeld per woning? Rond af op twee decimalen.

c De gemeente Zaandam liet om de bevolkingsgroei op te vangen jaarlijks gemiddeld 1350 woningen bijbouwen. Als je het aantal mensen per woning constant houdt, hoeveel mensen kan Zaandam dan jaarlijks meer huisvesten?

d Tot welk jaar kan Zaandam zijn bevolking huisvesten als er gemiddeld 1350 woningen per jaar bijkomen en het aantal personen per woning ongewijzigd blijft?

Opgave 3

Een doorzichtige kunststof absorbeert een deel van het licht dat er doorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per cm kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte?

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen?

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof?

Opgave 4

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een fles cola voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot kamertemperatuur, de temperatuur van de fles cola neemt juist af tot koelkasttemperatuur. De formules voor de temperaturen T_1 en T_2 (°C) in de flessen, afhankelijk van de tijd t (min) zien er zo uit:
$T_1 = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$ en $T_2 = 6 + 13 \cdot 0{,}78^t$.

a Teken de grafieken van beide formules in één figuur. Laat t hierbij lopen van 0 tot 25.

b Welke van de formules hoort bij de fles melk, en welke bij de fles cola? Licht je antwoord toe.

c Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles cola?

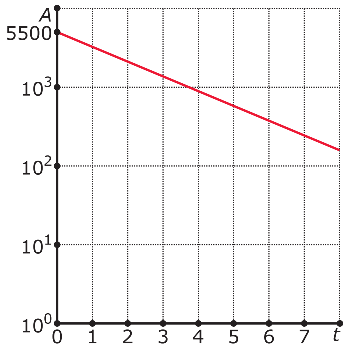
d Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles melk?

e Hoeveel bedraagt de kamertemperatuur?

f Vanaf welk tijdstip is de cola kouder dan de melk?

Opgave 5

In sommige dorpen in delen van Rusland is nog weinig werkgelegenheid en daarom trekken steeds meer mensen er weg. In de grafiek is het aantal inwoners A van zo'n dorp uitgezet tegen de tijd t in jaren. Het tijdstip $t = 0$ komt overeen met het jaar 2000. In dat jaar zijn er 5500 inwoners.



Figuur 2

a Waaruit concludeer je dat er sprake is van een exponentieel verband?

b Waren er in 2006 meer of minder dan 600 inwoners?

c Bepaal de groeifactor en geef een formule voor het aantal inwoners afhankelijk van de tijd (jaar).

d Iemand doet de volgende uitspraak: "Het aantal inwoners wordt nooit nul, maar komt wel steeds dichter bij nul."
Geef argumenten waarom je het met deze persoon eens of oneens bent.

Toepassen

Opgave 6: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven.
Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar.
Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na 4,468 miljard jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,8563. En $A = 1000 \cdot 0{,}8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet, kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 7: Wereldbevolking

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 3,6 miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

c B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

d Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij b hebt gevonden?

e Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 8: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in Mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[H+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[H^+]$ = 10⁻7 Mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10⁻7: pH = - log (10⁻7) = 7. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: $pH = -\log\left(H^+\right)$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $\left[H^+\right]$ = 18 Mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de H^+-concentratie in Mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H^+-concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijk pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de H^+-concentratie dan?

Examen

Opgave 9: Ureumgehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 gram toeneemt.
Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 gram ureum per cm^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we ervan uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken.
Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat ’s nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal).
We beginnen de eerste dag met 0 gram ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 gram ureum in het water. Na verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 gram ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 gram ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Stel U is de hoeveelheid ureum aan het begin van een zekere dag. Toon aan dat de hoeveelheid ureum aan het begin van de daaropvolgende dag gelijk is aan $0{,}8U + 400$.

We starten in het model weer met 0 gram ureum aan het begin van de eerste dag. De hoeveelheid ureum in gram (U_n) aan het begin van de n-de dag kan rechtstreeks berekend worden met de formule:
$U_n = 2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n$.

d Leg uit met behulp van deze formule dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan wordt.

e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo 1989, tweede tijdvak)

Opgave 10: Sparen, sparen en sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen. Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening.
We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van € 10000,00 dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening

De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is3,5% per jaar. Het is een'rente op rente'-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag$G$. Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag$G$dat na$t$-jaar op de groeirekening staat, kun je bereken met de formule:$G = 10000 \cdot 1{,}035^t$. Het bedrag op de groeirekening is na10jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is. Het bedrag is zelfs nog hoger dan € 20000.

a Bereken na hoeveel jaar dat is.

b Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening

De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert. Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger. In deze tabel kun je aflezen welke bedragen er na t-jaar sparen op de renteklimrekening R en op de betaalrekening B staan.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

Tabel 1

In de volgende volledige tabel staan de rentepercentages voor het t-de jaar.

t-de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

Tabel 2

c Bereken het rentepercentage voor het zevende jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.

d De renteklimrekening geeft in tien jaar € 4475,00 rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op één na beste.
Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar € 4475,00 rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

Opgave 11: De wet van More

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een zeer grote producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 één van de oprichters van het bedrijf.
Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een elektronische schakeling.)
In 1965 deed Moore daar een voorspelling over:
'Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien.'
Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2000 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen.
In de tabel zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

introductiejaar	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2250
1972	8008	2500
1974	8080	5000
1978	8086	29.000
1982	286	120.000
1985	386	275.000
1989	486 DX	1.180.000
1993	Pentium I	3.100.000
1997	Pentium II	7.500.000
1999	Pentium III	24.000.000
2000	Pentium IV	42.000.000

Tabel 3

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1972 met 250 toeneemt.
Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna lineair toe zou nemen met 250 per jaar.

a In welk jaar zou dan het aantal van 5000 transistoren per chip zijn bereikt? Licht je antwoord toe.

In werkelijkheid is de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

b Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

De Wet van Moore in formulevorm is: $A = 2250 \cdot 1{,}404^t$.
Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. In de Pentium II-chip zitten volgens de tabel 7500000 transistoren. Dat aantal transistoren wijkt nogal af van de voorspelling volgens de Wet van Moore.

c Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgens de formule van de Wet van Moore.

d Met behulp van de formule kunnen we voorspellen wanneer er 1 miljard transistoren in een computerchip zitten. Bereken hoeveel jaar na 1971 dit het geval is.

(bron: examen wiskunde A havo 2005, eerste tijdvak))