4.5 Logaritmische schalen

Inleiding

Exponentiële groei is vaak ook nogal een explosieve groei. Je hebt al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon, of (bij een groeifactor tussen 0 en 1) met heel kleine positieve getallen. Dat is lastig bij het maken van grafieken waaruit je met enige nauwkeurigheid wilt kunnen aflezen. Het lukt bijna niet om in één grafiek zowel de (kleine) beginwaarden als de (hele grote) waarden na verloop van tijd te laten zien.
Er is echter speciaal grafiekenpapier bedacht om dit probleem op te lossen. Het is zo gemaakt, dat de grafiek van een exponentiële formule er op dit papier als een rechte lijn uitziet.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen te werken;
- logaritmisch grafiekenpapier te gebruiken;
- het voorschrift van exponentiële formules op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

- werken met exponentiële formules;
- werken met logaritmen.

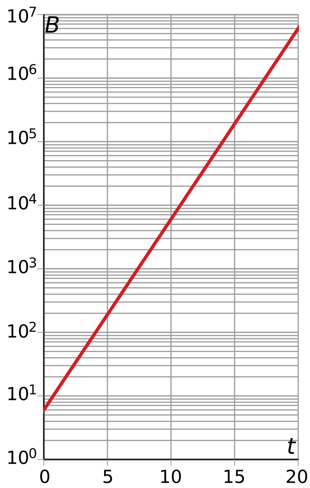
Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Hier zie je een grafiek van B als functie van t. Op de verticale as is een bijzondere schaalverdeling gebruikt.

a Wat is er voor bijzonders aan die schaalverdeling?

b Teken zelf eens zo'n schaalverdeling op de verticale as en maak de grafiek van B als functie van t.



Figuur 1

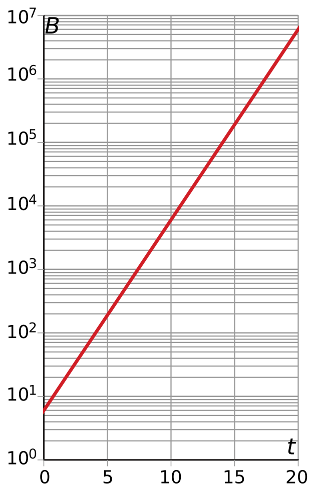
Uitleg

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Bekijk de grafiek van B als functie van t. Op de B-as is een zogenaamde logaritmische schaalverdeling gebruikt.

In plaats van een lineaire verdeling zoals 0, 1, 2, 3, 4, enzovoort, zet je dan de machten van 10 neer: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 enzovoort.

Om de uitkomsten voor B op de juiste plek te zetten, gebruik je een 10-logaritme. Bijvoorbeeld op $t = 12$ heb je $B = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ milligram bacteriën. Dat getal ligt tussen 10^4 en 10^5. De logaritme van dat getal is: $\log(24576) \approx 4{,}39$. Je zet het daarom op 4,39 eenheden boven de horizontale as, bij $10^{4{,}39}$ dus.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal.



Figuur 2

Opgave 1

Als je voor de grafiek van de exponentiële functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ op de B-as een speciale (logaritmische) schaalverdeling gebruikt, ziet de grafiek eruit als een rechte lijn, zie de **Uitleg**.

a Zijn op deze schaalverdeling de afstanden tussen twee maatstreepjes steeds even groot?

b Laat zien dat de punten die horen bij $B(5)$ en $B(10)$ goed zijn getekend.

In feite staat op de verticale as de waarde van B op de plek van $\log(B)$. Neem maar eens een gewoon stuk roosterpapier en maak een assenstelsel met $\log(B)$ uitgezet tegen t.

c Maak eerst een tabel van $\log(B)$ afhankelijk van t.

d Zet de bijbehorende punten in een assenstelsel. Als het goed is, krijg je een rechte lijn als grafiek.

e Met de eigenschappen van logaritmen kun je laten zien dat $\log(B)$ ook echt een lineaire functie van t is. Toon aan dat $B = 6 \cdot 2^t$ is te herleiden tot $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $y = 2 \cdot 3^x$.

a Maak een grafiek van $\log(y)$ uitgezet tegen x. Neem x van 0 tot 15.

b Vervang de getallen op de verticale as door de bijbehorende y-waarden. Je krijgt dan weer een grafiek van y als functie van x, maar nu met een logaritmische schaal op de verticale as.

c Lees uit de laatste grafiek af hoe groot $y(10)$ is en controleer het antwoord met het gegeven functievoorschrift.

Theorie en voorbeelden

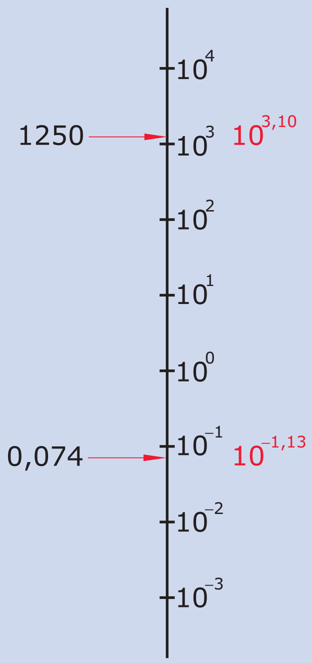
Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** zet je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar uit. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen in dezelfde schaalverdeling plaatsen. Met behulp van de 10-**logaritme** ([LOG] op je rekenmachine) kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3{,}10$ dus $1250 \approx 10^{3{,}10}$
  Je plaatst 1250 dus op 3,10 eenheden boven 10^0, net boven 10^3.
- $\log(0{,}074) \approx -1{,}13$ dus $0{,}074 \approx 10^{-1{,}13}$
  Je plaatst 0,074 dus op 1,13 eenheden onder 10^0, net onder 10^{-1}.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook speciaal **enkellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat en om een bijpassende formule op te stellen.



Figuur 3

Voorbeeld 1

Laat zien hoe je op een logaritmische schaal de getallen 7250 en 0,002 aan kunt geven. Laat ook zien, hoe je af kunt lezen welke waarden a en b hebben.

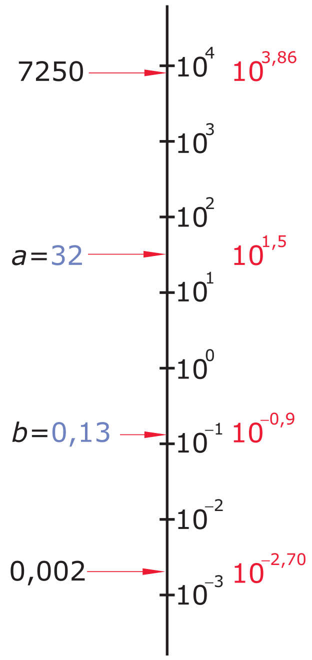
Antwoord

Eerst 7250 en 0,002 omrekenen:

- $\log(7250) \approx 3{,}86$ dus $7250 \approx 10^{3,86}$. Je plaatst 7250 dus op 3,86 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^3 en 10^4.
- $\log(0{,}002) \approx -2{,}70$ dus $0{,}002 \approx 10^{-2,70}$. Je plaatst 0,002 dus op 2,70 eenheden onder 10^0, dat is tussen 10^{-2} en 10^{-3}.

Nu aflezen:

- $a \approx 10^{1,5} \approx 32$
- $b \approx 10^{-0,9} \approx 0{,}13$



Figuur 4

Opgave 3

Je weet nu hoe je getallen kunt plaatsen op een logaritmische schaal en hoe je van zo'n schaal waarden kunt aflezen. Teken zelf zo'n logaritmische schaal.

a Geef de getallen 20, 20000 en 0,02 op deze schaal aan.

b Gebruik deze schaal om groottes te vergelijken. Begin met een mens van 1,80 m groot. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

c De Mount Everest is ongeveer 8,884 km hoog. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.

d Een amoebe is een eencellig organisme met een afmeting van 0,003 tot 0,8 millimeter. Geef deze getallen op je schaalverdeling aan.

e Op je schaalverdeling is a het getal dat midden tussen 10^3 en 10^4 in zit. Bereken a in gehelen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Voor de groei van het aantal inwoners van de gemeente V geldt de formule: $A = 16000 \cdot 1{,}012^t$. Hierin is A het aantal inwoners en t de tijd in jaren. Maak eerst een tabel. Rond af op twee decimalen.

Teken de grafiek van A afhankelijk van t op **enkellogaritmisch papier** voor de 50 jaren vanaf $t = 0$.

Antwoord

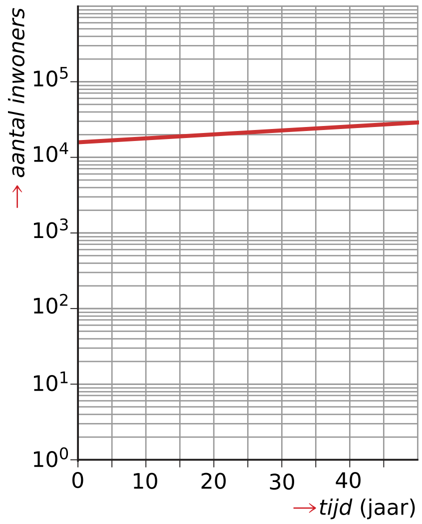
De tabel wordt zo:

t	0	10	20	30	40	50
A	16000,00	18027,07	20310,95	22884,18	25783,42	29049,96

Tabel 1

Gebruik het blad logaritmisch papier om de grafiek te tekenen met behulp van de gegevens in de tabel.

Om de uitkomsten voor A op de juiste plek op de logaritmisch verdeelde A-as te zetten, gebruik je een 10-logaritme.
Bijvoorbeeld op $t = 10$ heb je $A = 16000 \cdot 1{,}012^{10} = 18027{,}07$ inwoners. Dat getal ligt tussen $10000 = 10^4$ en $100000 = 10^5$, want de logaritme van dit getal is: $\log_{10}(18027{,}07) \approx 4{,}26$. Je zet het daarom op 4,26 eenheden boven de horizontale as, bij $10^{4{,}26}$ dus, tussen de horizontale lijnen bij 10^4 en $2 \cdot 10^4$.
Doe je dit ook voor de andere t-waarden, dan krijg je de grafiek.



Figuur 5

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

Voor de groei van het aantal inwoners van de gemeente W geldt de formule $B = 9500 \cdot 1{,}029^t$. Hierin is B het aantal inwoners en t de tijd in jaren.

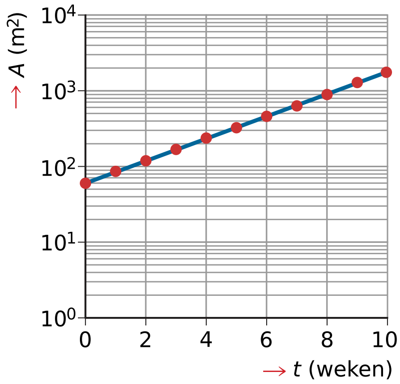
a Maak een tabel zoals in het voorbeeld met het aantal inwoners B in t jaren.

b Teken de grafiek van B afhankelijk van t op hetzelfde logaritmische papier als de grafiek uit het voorbeeld.

c Groeit het aantal inwoners van W het aantal inwoners van de gemeente V voorbij in deze 50 jaar? Zo ja, in welk jaar? Lees af in de grafiek en controleer met de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 3

Je ziet een grafiek van de groei van een waterplant. De grafiek geeft het verband weer tussen de oppervlakte A (m^2) en de tijd t (week). Stel een bijpassende formule op.



Figuur 6

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t: $A = b \cdot g^t$

Uit de figuur lees je af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 60$
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 900$

De groeifactor per 8 weken is ongeveer $\frac{900}{60}$. De groeifactor per week is ongeveer: $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}40$.

Je vindt dus: $A = 63 \cdot 1{,}40^t$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daarbij kun je een formule opstellen van de vorm: $A = b \cdot g^t$

a Lees de waarden voor A bij $t = 2$ en $t = 10$ af.

b Stel met behulp van deze waarden een formule voor A op. Ga na dat je ongeveer hetzelfde vindt als in het voorbeeld.

c Waarom is het handig om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 6

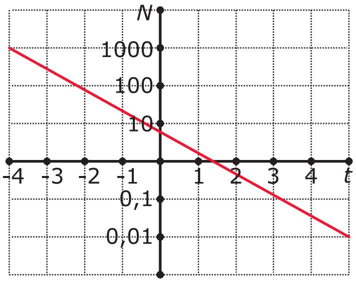
Bekijk deze grafiek die het verband tussen N en t weergeeft.

a Welke coördinaten heeft het snijpunt van de twee assen?

b Lees twee waarden voor N uit de grafiek af en stel een formule op voor N.

c Bereken ter controle met die formule het snijpunt met de getekende t-as.

d Waarom heeft het geen zin om te vragen naar de oplossingen van $N = 0$?



Figuur 7

Verwerken

Opgave 7

Teken een rechte lijn door de punten (2,40), (4,400) en (6,4000) op logaritmisch papier.

a Waarom hoort bij de lijn door deze punten een exponentieel verband?

b Geef een formule bij dit exponentiële verband.

Opgave 8

De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2000 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2000 zijn er 80000 inwoners.

a Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2000.

b Teken een bijpassende grafiek op enkellogaritmisch papier.

c Lees uit die grafiek het aantal inwoners af op 1 januari 2015. Controleer je antwoord met behulp van de formule.

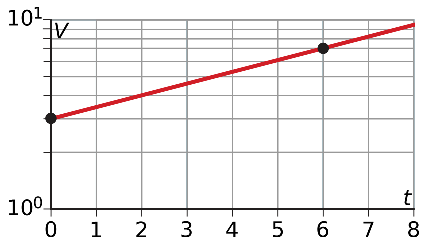
Opgave 9

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend die het verband tussen een toenemende hoeveelheid V en de tijd t weergeeft.

a Geef een formule voor V.

b Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 10$ in twee decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoord met de grafiek.

c Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t-as. Bereken de bijbehorende waarde van t in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 8

Opgave 10

Gegeven zijn de exponentiële verbanden $N_1 = 10 \cdot 5^t$ en $N_2 = 5 \cdot 10^t$.

a Welke grafiek gaat het steilst wanneer beide verbanden op enkellogaritmisch papier worden getekend?

b Teken de beide grafieken op enkellogaritmisch papier. Neem voor t de waarden 0 tot en met 4.

c Heeft het snijpunt op enkellogaritmisch papier een betekenis? Zo ja, welke?

Opgave 11

Deze tabel met gegevens hoort bij een bacteriecultuur. t is gegeven in uren en N in aantallen.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 2

a Maak met behulp van deze tabel een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t.

b Teken de bijbehorende grafiek. Kun je deze grafiek benaderen door een rechte lijn? Is er sprake van exponentiële groei?

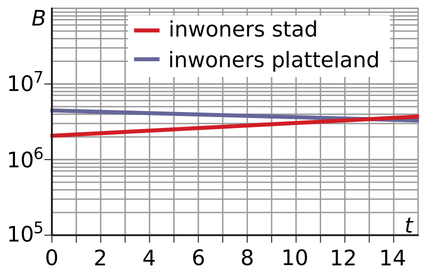
c Stel een formule op die het verband tussen $\log(N)$ en t beschrijft.

d Stel ook een formule op die het verband tussen N en t beschrijft.

Toepassen

Opgave 12: Van platteland naar stad

In China zie je de laatste jaren een steeds groter wordend verschil tussen het aantal inwoners op het platteland en in de steden. Veel jeugd verlaat het platteland om in de stad te gaan wonen. Zo ook in Kunming, de hoofdstad van de zuidwestelijke provincie Yunnan. Op 1 januari 2000 had de regio rond Kunming naar schatting 6,5 miljoen inwoners, waarvan 2,055 miljoen mensen in de stad woonden. De formule van het aantal inwoners afhankelijk van de tijd t (jaar) is: $B = 2055000 \cdot 1{,}04^t$ met $t = 0$ op 1 januari 2000.



Figuur 9

Bekijk de grafiek.

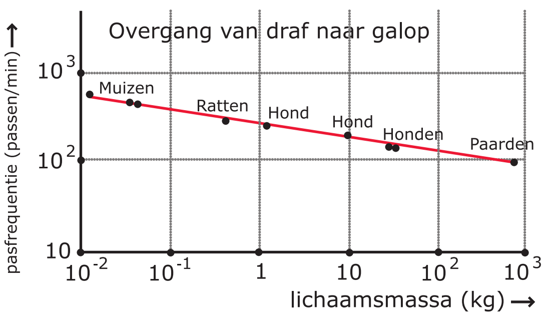
a In welk jaar woonden er 2,5 miljoen mensen in de stad Kunming?

b Het aantal inwoners op het platteland in de regio Kunming nam na 1 januari 2000 per jaar met 2% af. Stel een bijpassende formule op voor het aantal inwoners op het platteland.

c In welk jaar was het aantal inwoners in de stad gelijk aan het aantal inwoners op het platteland?

Opgave 13: Pasfrequentie

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P. De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



Figuur 10

a Waaraan kun je zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?

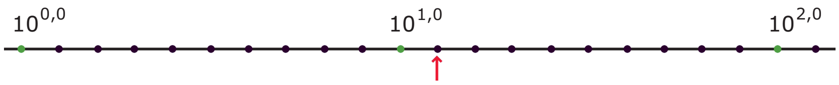
b Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite $\log(P)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Voor het punt dat hoort bij paarden, geldt dan ongeveer $\log(m) = 2{,}9$ en $\log(P) = 2{,}0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.

c Leid nu een formule af die het verband tussen $\log(P)$ en $\log(m)$ beschrijft.

Testen

Opgave 14

Teken een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling (neem deze figuur over).



Figuur 11

a Welk getal hoort bij het pijltje?

b Teken een pijltje dat hoort bij het getal 2.

c Geef aan waar 5,5 en waar $10^{0,5}$ moeten staan. Doe dit ook bij 55 en $10^{1,5}$.

d Geef ook $3\frac{1}{4}$ en $10^{\frac{1}{4}}$ aan.

Opgave 15

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken (t)	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (A in dm^2)	40	57	89	134	200	305	447

Tabel 3

a Zet de punten (0,40), (1,57), ..., (6,447) uit op enkellogaritmisch papier.

b Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

c Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?

d Stel een formule op voor de oppervlakte die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.