4.4 Exponentiële functies

Inleiding

Bij exponentiële groei horen formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Je gaat nu deze exponentiële functies nader bestuderen. De groeifactor (het grondtal) is steeds positief.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is en de karakteristieken ervan bepalen;
- een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- werken met formules en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren. Bekijk de grafiek van $y = 6 \cdot 2^x$.

a Welke snijpunten met de assen heeft deze grafiek?

b Zijn er extremen? Zijn er asymptoten?

c Welke karakteristieken hebben formules van de vorm $y = b \cdot g^x$?

Uitleg

Bekijk de applet.

Met de grafische rekenmachine kun je grafieken bekijken van formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Deze formules komen onder andere voor bij exponentiële groei en heten exponentiële functies. Bekijk een grafiek met b een positief getal op de grafische rekenmachine.

- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend stijgend.
- Als $g = 1$ is de grafiek constant.
- Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend dalend.
- Er zijn geen nulpunten, de x-as is een horizontale asymptoot.
- Er is geen minimum of maximum.

Je moet dit zorgvuldiger beredeneren dan alleen op grond van een grafiek. Bedenk je dat door vermenigvuldigen met een getal groter dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden. Neemt x toe, dan worden de y-waarden groter. Neemt x af, dan worden de y-waarden kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is. De grafiek komt dus nooit op de x-as, maar wel steeds dichter erbij. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$.

Opgave 1

Bekijk grafieken van verbanden van de vorm $y = b \cdot g^x$ met de grafische rekenmachine.

a Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

b Neem $b = 1$ en $g = 3$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

c Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Is de grafiek stijgend of dalend?

d Neem $b = 1$ en $g = 0{,}5$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

e Neem $b = 2$ en $g = 1{,}5$. Welke formule krijg je voor dit verband? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

f Neem $b = -2$ en $g = 1{,}5$. Welke formule krijg je? Wordt y ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

Opgave 2

Welke eigenschappen heeft de grafiek van een formule van de vorm $y = b \cdot g^x$ als $b < 0$? (Maak verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.)

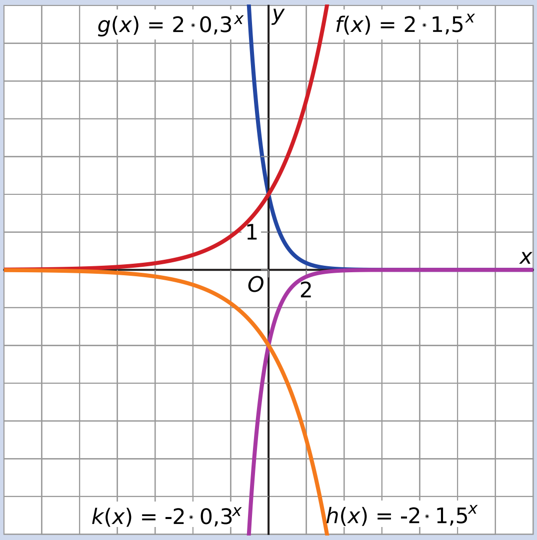
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Exponentiële functies

De grafiek van het **exponentiële verband** $y = b \cdot g^x$ heeft de volgende karakteristieken:

- De grafiek snijdt de y-as in het punt $(0,b)$.
- Als $b > 0$ en $g > 1$, is de grafiek stijgend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as. Je kunt de functiewaarde zo dicht bij 0 krijgen als je wilt door x voldoende klein te nemen.
- Als $b > 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek dalend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek x-as.
- Als $b < 0$ en $0 < g < 1$ is de grafiek stijgend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek x-as.
- Als $b < 0$ en $g > 1$, is de grafiek dalend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as.
- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.



Figuur 1

Voorbeeld 1

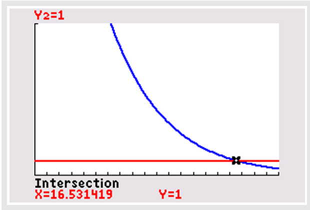
In het water van een meer is verontreiniging ontdekt. Er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.

Na hoeveel dagen is de concentratie van deze stof in het meer minder dan 1 mg/L?

Antwoord

De 'groeifactor' per dag is 0,80. Op $t = 0$ is er 40 mg/L gemeten. Voor de concentratie C (mg/L) geldt dus: $C = 40 \cdot 0{,}80^t$.

Omdat de groeifactor tussen 0 en 1 ligt, is dit een dalende exponentiële grafiek. Echter, zo'n exponentiële formule komt nooit op 0 uit, hoe groot je t ook kiest. Is de stof dan nooit verdwenen? Theoretisch inderdaad niet, maar in de praktijk is de stof niet meer meetbaar als de concentratie onder de 1 mg/L zakt (dat volgt uit de nauwkeurigheid van meten). Om te bepalen na hoeveel dagen de concentratie van deze stof minder dan 1 mg/L is, moet je de ongelijkheid $40 \cdot 0{,}80^t < 1$ oplossen.



Figuur 2

Dat doe je met de grafische rekenmachine. Je vindt: $t > 16{,}5$.

Opgave 3

Lees in **Voorbeeld 1** over de exponentiële afname van de concentratie van een (verontreinigende) stof in het water van een meer.

a Leg uit waarom de groeifactor per dag 0,80 is.

b Breng de grafiek van C in beeld op de grafische rekenmachine.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig vanaf welk tijdstip de concentratie niet meer meetbaar is. Dus vind de waarde van t waarvoor $40 \cdot 0{,}8^t < 1$.

Voorbeeld 2

In een stedelijk gebied liggen twee middelgrote steden: A met 750000 inwoners en B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in B was dat 3,1%.
Na hoeveel jaren is B groter dan A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

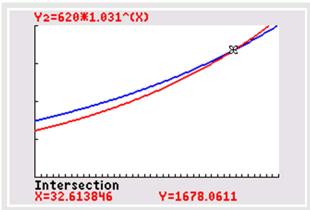
Antwoord

Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van A voorstelt en B dat van B, dan geldt: de groeifactor van A is 1,025, die van B is 1,031. Neem A en B in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn de groeifuncties:

- $A = 750 \cdot 1{,}025^t$
- $B = 620 \cdot 1{,}031^t$

De bijbehorende grafieken maak je op de grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Ga na dat je $t = 32{,}6138...$ vindt.

Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 is B groter als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 3

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

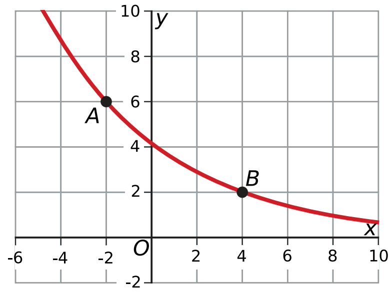
a Waaraan zie je dat stad B harder groeit dan stad A?

b Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t = 32{,}6138...$ vindt.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Een exponentiële functie heeft de vorm $y = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2,6)$ en $B(4,2)$.
Stel een bijpassende formule op. Rond b en g af op twee decimalen.



Figuur 4

Antwoord

Bepaal eerst de groeifactor g. Ga je van $A(-2,6)$ naar $B(4,2)$, dan gaat x van -2 naar 4 en neemt dus met 6 toe.

Daarbij wordt y dan vermenigvuldigd met $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Voor het grondtal g geldt daarom: $g = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 0{,}83$.

Voor punt B geldt: $y = 2$ als $x = 4$.
Dus moet $b \cdot 0{,}83^4 = 2$ en dus: $b \approx 4{,}21$.

De bijpassende formule is dus: $y = 4{,}21 \cdot 0{,}83^x$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** wordt uitgelegd hoe je de formule opstelt van een exponentieel verband als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Stel de formule op van het exponentiële verband waarvan de grafiek gaat door (0,200) en (14,350).

a De beginwaarde kun je direct zien. Hoe groot is de beginwaarde?

b Hoe groot is de groeifactor van het verband? Rond af op drie decimalen.

c Schrijf de formule voor het exponentiële verband op.

Opgave 6

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x$ is gegeven dat $y = 200$ als $x = 10$. Verder hoort bij $x = 14$ een y-waarde van 350. Stel de bijpassende formule op. Rond g af op drie decimalen en b op gehelen.

Verwerken

Opgave 7

In 2000 heeft iemand € 10000,00 op een spaarrekening gezet. De rente was toen 5% per jaar en werd bijgeschreven op de spaarrekening.

a Stel een bijpassende formule op voor het saldo S met t in jaren na het moment waarop het startbedrag op de spaarrekening is geplaatst. Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek goed in beeld komt.

b Hoelang duurt het voor het spaartegoed is gegroeid tot € 15000,00?

c Hoelang duurt het voor het spaartegoed zich verdubbeld heeft?

Opgave 8

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat ooit iemand € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

a Wanneer moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Geef je antwoord in één jaar nauwkeurig.

b Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S = 4000 \cdot 1{,}05^t$ te tekenen?

c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe. Wat betekent dit voor de grafiek van S?

Opgave 9

De smartphone is niet meer weg te denken. Eind 2001 waren er in Nederland ongeveer 12 miljoen aansluitingen op het mobiele netwerk. Eind 2009 waren het er al 20 miljoen. In deze periode was er sprake van exponentiële groei.
Bereken met welk percentage het aantal mobiele aansluitingen jaarlijks toenam.

Opgave 10

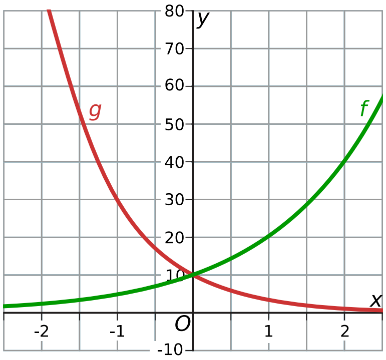
Een huurder betaalt een huur van € 650,00 en vindt de jaarlijkse huurverhoging van 5,5% te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50,00 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

Opgave 11

Bekijk deze grafieken van twee exponentiële functies.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 5

Toepassen

Opgave 12: Centenarians

In Engeland wordt iemand die de leeftijd van 100 jaar bereikt, aangeduid met de titel ‘centenarian’. Vanaf 1967 begon het totale aantal centenarians bij benadering exponentieel te groeien. Waren er op 1 januari 1967 zo’n 1000 centenarians, op 1 januari 2009 was dit aantal gestegen tot 9600.

a Bereken het groeipercentage per jaar in deze periode.

De groei van het aantal centenarians komt voornamelijk voor rekening van vrouwen. Op 1 januari 2009 was $\frac{7}{8}$ deel van de 9600 centenarians vrouwelijk. Voor de toekomst gaat men in Engeland uit van de volgende aannames:

- Het aantal centenarians stijgt vanaf 1 januari 2009 met 8,0% per jaar.
- Het aantal vrouwelijke centenarians blijft in de toekomst $\frac{7}{8}$ deel van het totaal.

b Bereken het te verwachten aantal vrouwelijke centenarians op 1 januari 2034 in Engeland.

c Vanaf welk jaar zullen er in Engeland meer dan 100000 centenarians zijn?

(naar: pilotexamen wiskunde A in 2013, eerste tijdvak)

Opgave 13: Radioactief afval

Op een afgelegen terrein wordt op 6 januari 2017 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval er al tien jaar heeft gelegen. De straling blijkt 2000 Bq (becquerel) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Bepaal hoeveel Bq de straling een jaar geleden was. En hoe groot is de straling over 2,5 jaar?

b Stel een formule op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 6 januari 2017.

c Vanaf welke datum is de straling minder dan 1000 Bq?

Testen

Opgave 14

Een bepaalde hoeveelheid H groeit vanaf $t = 0$ volgens $H = 200 \cdot 1{,}03^t$.

a Hoe zie je aan de formule dat er echt van toename sprake is?

b Vanaf welke waarde van t (in drie decimalen nauwkeurig) is de hoeveelheid 200% groter geworden dan op $t = 0$?

c Neem aan dat ook voor $t = 0$ deze hoeveelheid met 3% per tijdseenheid groeide. Voor welke waarden van t is de hoeveelheid kleiner dan 0,01?

Opgave 15

Iemand betaalt op 1-1-2010 een huur van € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt in januari zijn huur met 5,5% verhoogd.

a Stel een formule op voor de huur per maand H afhankelijk van de tijd t in jaren na 2010.

b Vanaf welke datum is de huur hoger dan € 1000,00 per maand?

Opgave 16

De grafiek van een exponentiële functie gaat door de punten (2,80) en (8,200). Stel een bijpassende formule op.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.